



FACULDADE DE TECNOLOGIA SENAI-CIMATEC  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM GESTÃO E TECNOLOGIA INDUSTRIAL

ENG. ANTONIO CARLOS CARVALHO NASCIMENTO FILHO

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM COMPONENTE  
ESTRUTURAL AUTOMOTIVO**

Salvador

2011

ENG. ANTONIO CARLOS CARVALHO NASCIMENTO FILHO

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM COMPONENTE  
ESTRUTURAL AUTOMOTIVO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Gestão e Tecnologia Industrial da Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Gestão e Tecnologia Industrial.

Salvador

2011

## SENAI CIMATEC

### Mestrado em Gestão e Tecnologia Industrial

A Banca Examinadora, constituída pelos professores abaixo listados, aprova a Dissertação de Mestrado, intitulada "ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM COMPONENTE ESTRUTURAL AUTOMOTIVO", apresentada no dia 20 de abril de 2011, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de **Mestre em Gestão e Tecnologia Industrial**.

Orientador:

  
Prof. Marcelo Bruno da Silveira Magalhães, Dr.  
(FORD)

Membro interno da banca:

  
Prof. Xisto Lucas Travassos Junior, Dr.  
(SENAI CIMATEC)

Membro interno da banca:

  
Prof. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves, Dr.  
(SENAI CIMATEC)

Membro externo da banca:

  
Prof. Antônio José da Silva Neto, Dr.  
(UERJ)

ENG. ANTONIO CARLOS CARVALHO NASCIMENTO FILHO

## **ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UM COMPONENTE ESTRUTURAL AUTOMOTIVO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Gestão e Tecnologia Industrial da Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Gestão e Tecnologia Industrial.

Área de concentração: Métodos aplicados ao Desenvolvimento de Produtos

Orientador: Dr. Marcelo Magalhães

Salvador

2011

Ficha catalográfica  
elaborada pela Biblioteca da Faculdade de Tecnologia Senai - Cimatec

N224a

Nascimento Filho, Antonio Carlos Carvalho

Análise de confiabilidade de um componente estrutural  
automotivo / Antonio Carlos Carvalho Nascimento Filho, 2011.

133f.;il.; color.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Magalhães

Dissertação – Faculdade de Tecnologia Senai - Cimatec,  
Mestrado em Gestão e Tecnologia Industrial, 2011.

1. Engenharia da confiabilidade. 2. Confiabilidade. 3. Carregamento-  
capacidade - Interferência. 4. Confiabilidade estrutural. 5. Método Monte  
Carlo. I. Faculdade de Tecnologia Senai-CIMATEC. II. Magalhães,  
Marcelo. III. Título.

CDD: 620.00452

Dedico este trabalho a DEUS, aos meus pais, a minha esposa, aos meus professores e em especial ao meu filho, João Vítor, que me alegra e motiva todos os dias da minha vida.

## **AGRADECIMENTO**

Primeiramente, agradeço a DEUS por suas graças e amor pleno.

Agradeço a meus pais, por me terem concebido, amado e educado incondicionalmente. Sem vocês, não estaria aqui. Muito obrigado por tudo.

Agradeço também a minha esposa, Adriana, que me incentivou em todos os momentos deste desafio do curso de mestrado.

Agradeço ao Dr. Eng. Oscar Garcia, que me orientou durante o primeiro ano do curso de mestrado.

Agradeço ao Dr. Eng. Marcelo Magalhães, que me orientou durante o segundo ano do curso de mestrado e me ajudou incondicionalmente na conclusão deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas da Ford Motor Company© do Brasil que bravaram comigo o desafio de um curso de mestrado.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao meu filho João Vitor. Seu nascimento foi a recompensa mais importante que recebi em toda a minha vida. Te amo muito, meu filho.

## RESUMO

Em projetos de componentes estruturais automotivos é comum o dimensionamento dos mesmos por meio de experimentos computacionais, para "a pior condição possível", ou seja, uma condição de mínima resistência do componente (capacidade) e máxima condição de cargas aplicadas (carregamento). No entanto, em uma situação real, não é possível determinar com certeza absoluta tais valores devido a natureza aleatória dos parâmetros envolvidos. Dessa forma, tal dimensionamento deveria ser tratado de forma probabilística, aonde os parâmetros envolvidos fossem considerados como variáveis aleatórias, e o projeto pudesse ser qualificado por uma condição desejada de confiabilidade. Assim, capacidade e carregamento seriam descritas por meios de funções distribuições de probabilidade que se cruzariam e gerariam uma condição de interferência carregamento-capacidade.

Esta dissertação apresenta uma proposta de processo para realização de experimentos computacionais para análises de confiabilidade em componentes estruturais automotivos, quando submetidos a uma situação de interferência carregamento-capacidade. Além disso, o trabalho busca:

- Discutir técnicas de predição de confiabilidade em componentes estruturais automotivos, quando submetidos a uma situação de interferência carregamento-capacidade.
- Avaliar como a abordagem das diferentes técnicas de predição de confiabilidade, em uma situação de interferência carregamento-capacidade, pode influenciar no dimensionamento de componentes estruturais automotivos;
- Aplicar o processo desenvolvido em um estudo de caso prático, que permita uma análise de suas vantagens e limitações.

Como conclusão final, o processo proposto mostrou-se capaz de identificar o método de predição de confiabilidade mais adequado para resolver problemas de interferência carregamento - capacidade no dimensionamento de um componente estrutural automotivo, além de determinar a confiabilidade de tal componente.

**Palavras – chaves:** Confiabilidade estrutural automotiva; Interferência carregamento-capacidade; FOSM/FORM/SORM; Método de Monte Carlo; MARS;

## ABSTRACT

In design of automotive structural components is common scaling of the data by computational experiments for the "worst case", i.e. a condition of the component of least resistance (stress) and maximum load conditions applied (strength). However, in a real situation, it is not possible to determine with absolute certainty these amounts due to the random nature of the parameters involved. Thus, this design should be treated in a probabilistic way, where the parameters involved could be considered as random variables, and the project could be qualified for a desired condition of reliability. Thus, stress and strength would be described by probability distribution functions that would intersect and generate a stress – strength interference.

This paper presents a proposed process (flowchart) for performing computational experiments for reliability analysis in automotive structural components when subjected to a stress - strength interference. Moreover, this work intends to:

- Discuss techniques for predicting reliability in automotive structural components when subjected to a stress - strength interference.
- Assess how the approach of different techniques for predicting reliability in a situation of stress - strength interference can influence the design of structural automotive components;
- Apply the process (flowchart) developed in a practical case study, enabling an analysis of its advantages and limitations.

As final conclusion, the process showed itself as able to identify the most adequate method of reliability prediction to solve problems of stress - strength interference in a design of a structural automotive component.

**Key - words:** Structural reliability automotive; interference stress - strength, FOSM/FORM / SORM, Monte Carlo Method; MARS;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1: (a) Consideração usual no dimensionamento de estruturas; (b) Consideração real no dimensionamento de estruturas (ROSOWSKY, 1999);.....	1
Figura 3-1: Conceito básico Interferência carregamento-capacidade (HOUGAZ, 2005) .....	8
Figura 3-2 - Representação dos domínios de integração e superfície de estado - limite de dois parâmetros aleatórios, $X_1$ e $X_2$ (NOGUEIRA, 2005) .....	11
Figura 3-3 – Exemplo de modelo de Nataf (BECK, 2007) .....	12
Figura 3-4: Exemplos de planos de experimentos .....	14
Figura 3-5: Análise de fatores principais para três fatores quaisquer.....	15
Figura 3-6: Análise de Pareto das Interações .....	16
Figura 3-7: Exemplo de testes de ANOVA para uma função superfície de resposta qualquer. ....	22
Figura 3-8 : a) Função distribuição de probabilidade conjunta no domínio real; (b) Função distribuição de probabilidade conjunta no domínio padronizado (VERZENHASSI, 2008).....	25
Figura 3-9 – Erro entre superfícies de falha côncavas e convexas (SOARES, 2002) .....	27
Figura 3-10: Superfície de falha de FORM e SORM (SOARES, 2002).....	28
Figura 3-11: Distribuição de pontos de amostragem ao redor do ponto de projeto (PP).....	32
Figura 3-12: a) Função densidade de probabilidade da variável X dividida em cinco .....	34
Figura 3-13: Sistema em série com 4 componentes .....	37
Figura 3-14: Sistema em paralelo com 4 componentes .....	38
Figura 3-15: Redução passo-a-passo para determinação da confiabilidade de um sistema de 6 componentes: (i) Sistema original. (ii) Sistema reduzido para 4 componentes. (iii) Sistema reduzido para 2 componentes. (iv) Sistema reduzido para um componente (DHILLON, 1999).....	39
Figura 3-16: Gráfico tensão-deformação para aço comum (FIALHO, 2008).....	40
Figura 3-17: Círculo de Mohr e formulário (disponível em <a href="https://web.tecgraf.puc-rio.br/etools/mohr">https://web.tecgraf.puc-rio.br/etools/mohr</a> . Acessado em 27 de novembro de 2010).....	41

Figura 3-18: Representação de uma mola de constante elástica $K$ deslocada de $U$ quando sob a ação de uma força $F$ (ALVES FILHO, 2007) .....	45
Figura 3-19: a) Matriz de rigidez de uma estrutura constituída de apenas um elemento mola. b) Matriz de rigidez de uma estrutura constituída de vários elementos. (ALVES FILHO, 2007) .....	46
Figura 3-20: Circunferências ou esfera definem o tamanho de um elemento finito (FIALHO, 2008) .....	46
Figura 3-21: Biblioteca de elementos finitos (baseado em FIALHO, 2008).....	47
Figura 3-22: a)Discretização de uma viga com elemento triangular parabólico de estado plano de tensões; b)Diagrama de Vetores de deslocamento nodais; (ALVES FILHO, 2007).....	48
Figura 3-23: Viga bi-apoiada com uma carga concentrada $P$ .....	51
Figura 3-24: Quadro de variáveis aleatórias do Encore© 5.0.....	55
Figura 3-25: Quadro de respostas do Encore© 5.0.....	56
Figura 3-26: a) Valor de $b$ para confiabilidade (probabilidade) de 0,99999; b) Contribuição percentual de cada variável aleatória na determinação de $b$ ; .....	56
Figura 3-27: Curva de distribuição de probabilidade da variável $b$ .....	57
Figura 3-28: Curva de distribuição cumulativa de $b$ .....	57
Figura 3-29: Gráficos de dispersão das variáveis aleatórias $a, L, P, S_y$ .....	58
Figura 3-30: Curva de distribuição de probabilidade da variável $b$ .....	59
Figura 3-31: Curva de distribuição cumulativa de $b$ .....	59
Figura 4-1: a) Fluxograma “Simulações de Confiabilidade em componentes estruturais automotivos”, adaptado de (AGRAWAL et al., 1997); b) Sub-processo “Simulação da confiabilidade”. .....	63
Figura 4-2: Etapas de um ciclo de desenvolvimento de produto e suas ferramentas de qualidade.....	64
Figura 5-1: Top Mount (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda).....	70
Figura 5-2: Montagem de suspensão, caixa de roda e Top Mount (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda) .....	70
Figura 5-3: Instalação de transdutor em suspensão automotiva .....	71
Figura 5-4: Exemplo de pistas para testes de veículos automotores (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda) .....	71
Figura 5-5: Plano de experimento PESO x PISTA .....	73
Figura 5-6: Localização dos pontos de solda (em estrela) .....	75

Figura 5-7: Faces com restrição fixa (em destaque) .....	75
Figura 5-8: Face de montagem da suspensão (em destaque) .....	75
Figura 5-9: Visualização da malha .....	75
Figura 5-10: Teste de convergência h-adaptativo .....	76
Figura 5-11: Distribuição de tensões estáticas.....	76
Figura 5-12: Distribuição de deslocamentos estáticos .....	76
Figura 5-13: Gráfico de cubo (com dados médios) para FS, com mínimo valor em destaque .....	77
Figura 5-14: Análise de fatores principais para VM.....	78
Figura 5-15: Análise de Pareto das Interações para VM.....	79
Figura 5-16: Análise de resíduos para VM .....	80
Figura 5-17: Proposta de distribuição uniforme para variável <b>Peso</b> .....	81
Figura 5-18: Exemplo de estudo de capacidade para espessura de 1,2mm do material aço DP-600 (Cortesia da Arcelor-Mittal).....	82
Figura 5-19: Proposta de distribuição normal para variável <b>Esp</b> .....	83
Figura 5-20: Proposta de distribuição Normal para variável <b>Pista</b> .....	84
Figura 5-21: Pontos de experimentos por Hipercubo Latino .....	85
Figura 5-22: Distribuição de frequência e quadro de resumo estatístico para VM ....	86
Figura 5-23: Análise de resíduos da superfície de resposta MARS1_VM.....	87
Figura 5-24: Exemplo de estudo de capacidade para limite de escoamento do aço DP-600 (Cortesia da Arcelor-Mittal) .....	89
Figura 5-25: Proposta de distribuição Lognormal para variável <b>YS</b> .....	90
Figura 5-26: a) Valor de G(X) para confiabilidade (probabilidade) de 99,999%; b) Contribuição percentual de cada variável aleatória na determinação de G(X);.....	91
Figura 5-27: a) Curva de densidade de probabilidade para G(X); b) Curva de distribuição cumulativa para G(X); .....	91
Figura A-1 - Curva normal padronizada. ....	106
Figura A-2: Disposição de pontos observados em uma carta de controle .....	109

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 - Mecanismos de falha (ROSA, 1994).....	9
Tabela 3-2 - Exemplo de variáveis aleatórias e suas distribuições (VERZENHASSI, 2008) .....	10
Tabela 3-3: Exemplo de Hipercubo Latino para duas variáveis aleatórias de quatro níveis cada. ....	35
Tabela 3-4: Recomendação de índices de confiabilidade e probabilidade de falhas (JCSS, 2001).....	36
Tabela 3-5: Fatores para composição do fator de segurança (FIALHO, 2008).....	42
Tabela 3-6: Dados referentes a variáveis aleatórias .....	51
Tabela 3-7: Tabela comparativa entre os métodos e seus erros.....	60
Tabela 5-1: Leitura de cargas em diferentes tipos de pistas, com maior valor $\Delta F$ em destaque.....	71
Tabela 5-2: Distribuição de pesos (cheio e vazio) do veículo por roda, com máximo e mínimo valores em destaque. ....	72
Tabela 5-3: Propriedades mecânicas do <i>top mount</i> .....	73
Tabela 5-4: Matriz de experimentação .....	74
Tabela 5-5: Matriz dos planos de experimentos e suas respostas.....	77
Tabela 5-6: Entrada de Fatores e Respostas no Encore©;.....	84
Tabela 5-7: Matriz de experimentação para fatores <b>Peso</b> , <b>Esp</b> , <b>Pista</b> e resposta <b>VM</b> .....	85

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

@RISK® é uma marca registrada da Palisade, Inc;

ABAQUS® é uma marca registrada da Dassault-Systèmes, Inc;

ANSYS® é uma marca registrada da Ansys, Inc;

ARCELOR-MITTAL® é uma marca registrada da Arcelor-Mittal, Inc;

COSMOS® é uma marca registrada da Dassault-Systèmes, Inc;

CRYSTAL BALL® é uma marca registrada da Oracle, Inc;

ENCORE® é uma marca registrada da Ford Motor Company, Inc;

EVIIEWS® é uma marca registrada da IHS, Inc;

FORM - *First Order Reliability Method* – Método de confiabilidade de primeira ordem;

FOSM - *First Order-Second Moment* – Segundo momento de primeira ordem;

FS – Fator de Segurança;

GAUSS® é uma marca registrada da Aptech Systems, Inc;

GL – Grau de liberdade

JAVA® é uma marca registrada da Sun, Inc;

MARS - *Multivariate Adaptive Regression Splines* - Método Adaptativo de Regressão por Splines multi-variáveis;

MDF - Método de Diferenças Finitas;

MEC - Método de Elementos de Contorno;

MEF - Método de Elementos Finitos;

MINITAB® é uma marca registrada da Minitab®, Inc;

MMCHL - Método de Monte Carlo por Hipercubo Latino;

MMCI - Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância;

MMCS - Método de Monte Carlo Simples;

MS-EXCEL® é uma marca registrada da Microsoft, Inc;

MSR – Método de Superfície de Resposta;

NASTRAN® é uma marca registrada da MSC Software, Inc;

PP – Ponto de Projeto;

SIX SIGMA® é uma marca registrada da Motorola, Inc;.

SOLIDWORKS® é uma marca registrada da Dassault-Systèmes, Inc;

SORM - *Second Order Reliability Method* – Método de confiabilidade de segunda ordem;

*STATA*® é uma marca registrada da StataCorp, Inc;

*STATGRAPHICS*® é uma marca registrada da Statpoint Technologies, Inc;

*STATISTICA*® é uma marca registrada da StatSoft , Inc;

*XLSIM*® é uma marca registrada da Probilitech, Inc;

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras gregas minúsculas

$\alpha$  - Vetor unitário normal a superfície de estado - limite no ponto de projeto;

$\alpha_i$  - Fatores de sensibilidade;

$\alpha_s$  - Probabilidade de se cometer um “erro do tipo 1” na determinação dos fatores

$\{\alpha_i^k\}$  - Vetor de co-senos diretores;

$\beta$  - índice de confiabilidade;

$\gamma_{xy}$  - Deformação angular específica no plano xy;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  - Deformações lineares específicas nas direções x e y;

$\phi(z_1), \phi(z_2)$  - Funções distribuições de probabilidade normal das variáveis aleatórias padronizadas  $Z_1, Z_2$ ;

$\phi_2(z_1, z_2, \rho_{x_1, x_2})$  - Função distribuição de probabilidade normal bivariada;

$\eta$  - Argumentos das funções-degrau;

$\nu$  - Coeficiente de Poisson;

$\rho_{x_1, x_2}$  - Coeficiente de correlação das variáveis  $X_1, X_2$ ;

$\sigma_1, \sigma_2$  - Tensões principais;

$\sigma_x, \sigma_y$  - Tensão normal aplicada nas direções  $\vec{x}, \vec{y}$ ;

$\tau_{xy}$  - Tensão cisalhante aplicada no plano xy;

$\psi$  - Custo relativo da medida de segurança;

### Letras gregas maiúsculas

$\{\nabla G_i^k\}$  - Vetor gradiente da função estado – limite;

$\|\nabla G\|^k$  - Norma do vetor gradiente da função estado – limite;

$\Phi(x)$  - Função distribuição cumulativa normal de probabilidade;

$\Omega$  - Domínio das variáveis aleatórias do problema estatisticamente analisado;

$\Omega_f$  - Domínio de falha;

$\Omega_s$  - Domínio seguro (de não falha);

### **Letras romanas minúsculas**

$a$  – Distância do ponto de aplicação da carga  $P$  de um dos apoios de uma viga (exemplo 3.12);

$a_0$  - Coeficiente da função-base constante  $B_1$ ;

$\{a_m\}_1^M$  - Conjunto de coeficientes de uma função-regressão;

$b$  - Base de seção transversal de viga (exemplo 3.12);

$c_1, c_n$  - constantes;

$e_f$  - Efeito de um fator;

$\bar{e}_f$  - Efeito médio;

$e_z$  - Efeitos padronizados;

$\hat{f}(\mathbf{x})$  - Função regressão;

$f(X_1, X_2)$  - Função distribuição de probabilidade conjunta das variáveis  $X_1$  e  $X_2$ ;

$h$  - Altura de seção transversal de viga (exemplo 3.12);

$h(\mathbf{X})$  - Função auxiliar de densidade de probabilidade;

$n$  - número de fatores;

$q$  - Ordem de uma função spline;

$t$  - Valor da distribuição  $t$  de student;

$t_{km}$  - Valores correspondentes relacionadas a função-regressão;

$u(x, y), v(x, y)$  - Deslocamentos nodais baseados nas direções  $x$  e  $y$ .

$w(\mathbf{X})$  - Função de ponderação;

$\bar{x}_1, \bar{x}_n$  - Valores médios das variáveis  $X_1, X_2$ ;

$x, y, z$  - Valores das variáveis  $X, Y, Z$ ;

### **Letras romanas maiúsculas**

$A, B, C$  e  $D$  - Fatores de majoração do fator de segurança;

$B_m(\mathbf{x})$  - Função – base;

$D$  - Domínio;

$E$  - Módulo de elasticidade do material;

**Esp** - Espessura final da peça (exemplo prático);

$\{F\}$  - Matriz de cargas nodais;

FS - Fator de segurança;

$[K]$  - matriz de rigidez;

$[U]$  - Matriz dos deslocamentos nodais;

$G(\mathbf{X})$  - função de estado – limite;

$G(X_1, X_2)$  - Superfície de estado – limite;

$H(\eta)$  - função – degrau;

$H_i$  - Matriz hessiana;

$I_c$  - Função característica;

$I_x$  - Momento de inércia da seção transversal;

K - Constante elástica de uma mola;

$K_m$  - Número de divisões que deram origem a  $B_m$ ;

L - Comprimento de viga (exemplo 3.12);

M - Carga de flexão aplicada;

$M_{\max}$  - Máxima carga de flexão aplicada;

N - número de níveis;

P - Carga concentrada aplicada sobre uma viga (exemplo 3.12);

$P_f(\mathbf{X})$  - Probabilidade de falha de  $\mathbf{X}$ ;

**Peso** - Carga vertical devido a condição de peso do veículo (exemplo prático);

**Pista** - Carga vertical aplicada devido a qualidade da pista de rolamento (exemplo prático);

PP, Ppk - Índices de capacidade;

PSE - Pseudo - erro estatístico;

$\bar{Q}$  - Valor médio da capacidade Q;

$Q_{\min}$  - Limite mínimo de resistência;

$Q(\mathbf{X})$  - Função distribuição de probabilidade da capacidade de resistência do componente;

$\{\mathbb{R}_m\}_1^M$  - Conjunto de sub - limites disjuntos;

$R(\mathbf{X})$  - Confiabilidade estrutural;

$R_{SP}$  - Confiabilidade de um sistema em paralelo;

$R_{SS}$  - Confiabilidade de um sistema em série;

$\bar{S}$  - Valor médio do carregamento  $S$ ;

$S_{e_t}$  - Desvio padrão dos efeitos;

$s_{km}$  - Indicam o sentido da função-degrau associada;

$S_{\max}$  - Limite máximo de aplicação;

$S_{P_f}$  - Desvio da probabilidade de falha;

$S_Q$  - Desvio – padrão da função  $Q(\mathbf{X})$ ;

$S_s$  - Desvio – padrão da função  $S(\mathbf{X})$ ;

$S(\mathbf{X})$  - Função distribuição de probabilidade do carregamento atuante sobre o componente;

$S_{X_1}, S_{X_n}$  - Desvios - padrão das variáveis  $X_1, X_2$ ;

$V(m)$  - Conjunto de variáveis associadas com uma função-regressão MARS;

VM - Tensão de Von – Misses;

$\mathbf{X}$  - vetor de variáveis aleatórias que representam os mecanismos de falha.

$X_1, X_2$  - Variáveis aleatórias;

$X_1, X_2, X_3$  - Fatores quaisquer;

$x_{v(k,m)}$  - Variáveis de entrada relacionadas a função-regressão;

$X, Y, Z$  – Variáveis aleatórias quaisquer;

YR - Limite de ruptura;

YS - Limite de escoamento;

$Z_1, Z_2$  - Variáveis aleatórias padronizadas;

## SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>I</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>II</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>III</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>VI</b>
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....</b>	<b>VII</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>IX</b>
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo.....	2
1.2. Justificativa.....	2
1.3. Organização da dissertação.....	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>5</b>
<b>3. CONFIABILIDADE EM COMPONENTES AUTOMOTIVOS.....</b>	<b>7</b>
3.1. Interferência carregamento - capacidade.....	8
3.2. Mecanismos de falha e estado - limite.....	9
3.3. Definição da função distribuição de probabilidade conjunta.....	12
3.4. Método de Superfície de Resposta.....	13
3.4.1. Redução do número de fatores de um experimento.....	15
3.4.2. Método de Superfície de Respostas por MARS.....	18
3.4.3. Validação da função superfície de resposta.....	20
3.5. Método FOSM de predição de confiabilidade.....	22

<b>3.6. Método FORM de predição de confiabilidade .....</b>	<b>24</b>
<b>3.7. Método SORM de predição de confiabilidade .....</b>	<b>27</b>
<b>3.8. Método de Monte Carlo .....</b>	<b>29</b>
3.8.1. Método de Monte Carlo Simples (MMCS) .....	30
3.8.2. Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância (MMCI) .....	31
3.8.3. Método de Monte Carlo por Hipercubo Latino (MMCHL).....	33
<b>3.9. Recomendações de probabilidade de falhas de projetos.....</b>	<b>35</b>
<b>3.10. Confiabilidade de sistemas.....</b>	<b>37</b>
3.10.1. Confiabilidade de Sistemas em série.....	37
3.10.2. Confiabilidade de Sistemas em paralelo.....	37
3.10.3. Métodos de resolução de confiabilidade de sistemas por redução .....	38
<b>3.11. Modelagem matemática de componentes estruturais .....</b>	<b>39</b>
3.11.1. Fator de segurança.....	40
3.11.2. Método de Elementos Finitos.....	44
<b>3.12. Exemplo de aplicação dos métodos .....</b>	<b>50</b>
3.12.1. Abordagem I – Método determinístico .....	51
3.12.2. Abordagem II – Método FOSM .....	53
3.12.3. Abordagem III – Método FORM .....	55
3.12.4. Abordagem IV – Método de Monte Carlo.....	58
3.12.5. Conclusão sobre os métodos de predição de confiabilidade.....	60
<b>4. SIMULAÇÃO DE CONFIABILIDADE EM COMPONENTES ESTRUTURAIS AUTOMOTIVOS.....</b>	<b>62</b>
<b>4.1. Identificação de variáveis aleatórias e levantamento de dados.....</b>	<b>64</b>
<b>4.2. Seleção de plano de experimento e geração da matriz de experimentação .....</b>	<b>65</b>
<b>4.3. Elaboração do modelo matemático e realização do experimento .....</b>	<b>66</b>
<b>4.4. Redução de fatores do experimento .....</b>	<b>66</b>
<b>4.5. Planejamento de experimento Hipercubo Latino e realização de experimentos</b>	
<b>67</b>	

4.6. Análise da superfície de resposta MARS e definição da função distribuição de probabilidade conjunta. ....	67
4.7. Determinação da função estado - limite e seleção do índice de confiabilidade desejada .....	68
4.8. Simulação da confiabilidade.....	68
<b>5. EXPERIMENTO NUMÉRICO.....</b>	<b>70</b>
5.1. Identificação de variáveis aleatórias e Levantamento de dados .....	70
5.2. Seleção de plano de experimento e geração da matriz de experimentação .....	73
5.3. Construção do modelo matemático e Realização do experimento .....	74
5.4. Redução de fatores do experimento.....	78
5.5. Planejamento de experimento Hipercubo Latino e realização de experimentos 81	
5.6. Análise da superfície de resposta MARS e Definição da função distribuição de probabilidade conjunta. ....	86
5.7. Determinação da função estado - limite e seleção do índice de confiabilidade desejado .....	88
5.8. Simulação da confiabilidade.....	90
5.9. Conclusão do experimento.....	91
<b>6. CONCLUSÃO .....</b>	<b>93</b>
6.1. Sugestões para trabalhos futuros.....	94
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>96</b>
<b>APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.....</b>	<b>100</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Em problemas de engenharia buscam-se soluções com segurança e economia. Assim, um componente estrutural deve ser resistente e barato. Deve-se lembrar também que tal componente deve exercer sua função durante uma vida útil pré-determinada, de modo a atender as necessidades de seus consumidores.

O exercício de tal função durante um determinado tempo indica mais uma característica de um componente estrutural: a confiabilidade.

É muito comum dimensionar um componente de modo determinístico, levando em conta apenas a idéia de que as cargas aplicadas (carregamento) não devem superar a resistência do componente (capacidade). Mas apenas isso não é suficiente para assegurar a confiabilidade do componente dimensionado.

Devido a condições de fabricação, manuseio e aplicação dos produtos, existe variação de todos os parâmetros do componente: dimensões, peso próprio, propriedades materiais. Assim, a capacidade não é um limite único e determinístico, mas variável e aleatório. Também aleatórios e variados são os carregamentos aplicados ao componente.

A Figura 1-1 mostra a divergência entre a condição usual para o dimensionamento de um componente estrutural e a condição real. A região de interferência entre as duas curvas é chamada Interferência Carregamento-Capacidade e representa uma possibilidade de que a condição de carregamento supere a condição de capacidade.

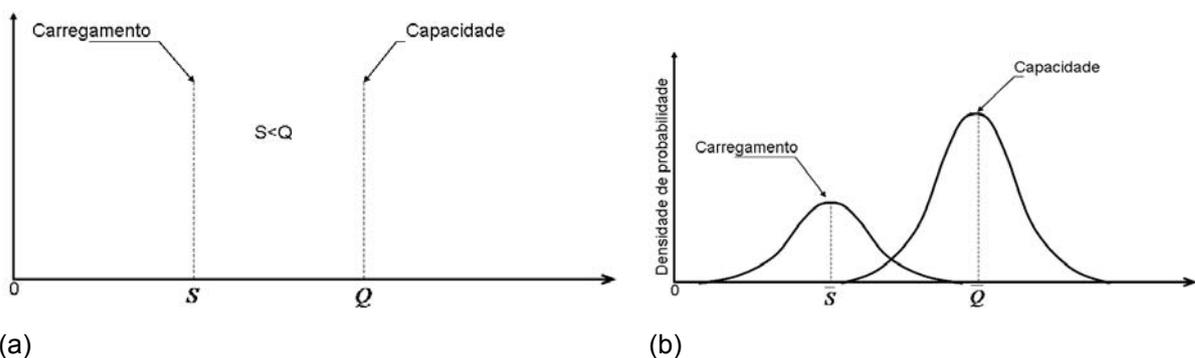


Figura 1-1: (a) Consideração usual no dimensionamento de estruturas; (b) Consideração real no dimensionamento de estruturas (ROSOWSKY, 1999);

Percebe-se que o método usual não é o mais adequado para o dimensionamento de um componente estrutural. Tal componente deve ser tratado por meio de um modo probabilístico, levando-se em conta a probabilidade de variação dos parâmetros físicos do componente e/ou das condições de carregamento.

## 1.1. Objetivo

Esta dissertação está relacionada a linha de pesquisa 'Métodos aplicados ao Desenvolvimento de Produtos' e tem como objetivo desenvolver uma proposta de processo para realização de experimentos computacionais para simulações de confiabilidade em componentes estruturais automotivos, quando submetidos a uma situação de interferência carregamento-capacidade.

Além disso, o trabalho pretende:

- Discutir técnicas de predição de confiabilidade em componentes estruturais automotivos, quando submetidos a uma situação de interferência carregamento-capacidade.
- Avaliar como a abordagem das diferentes técnicas de predição de confiabilidade, em uma situação de interferência carregamento-capacidade, pode influenciar no dimensionamento de componentes estruturais automotivos;
- Aplicar o processo desenvolvido em um estudo de caso que permita uma análise de suas vantagens e limitações. Tal caso deverá ser de simples avaliação, como em uma situação de carregamento estático dentro da zona elástica de deformação.

## 1.2. Justificativa

A modelagem de uma estrutura, ainda hoje, é feita de forma determinística. Para superar as incertezas relacionadas a um projeto costuma-se considerar casos extremos de máximo carregamento e mínima capacidade possível, além de utilizar coeficientes de segurança para modificar tais casos extremos.

Tais considerações não são consideradas adequadas, pois costumam gerar estruturas superdimensionadas e caras, adequadas para situações que podem ter uma probabilidade de ocorrência muito pequena.

Além disso, apesar da existência de normas técnicas que definem critérios de segurança para projetos de estruturas, a escolha dos coeficientes de segurança é fortemente baseada na experiência do projetista e em critérios como tipo/local de

aplicação do componente projetado, consequência da falha do componente projetado (custo de reparo, perdas econômicas, risco de morte), nível de detalhamento da análise, incertezas envolvidas e em experiências anteriores.

Segundo Beck (1999), a probabilidade de falha representa uma medida de segurança do projeto mais realista do que fatores de segurança, podendo inclusive ser utilizada para comparar diferentes projetos ou diferentes condições de carregamento.

Por isso a construção de um processo simplificado para a realização de simulações de confiabilidade em componentes estruturais automotivos pode ser de grande valia para indústrias do setor automotivo. A utilização de tal processo ajudaria aos engenheiros automotivos a utilizar a confiabilidade estrutural para avaliar a segurança estrutural de seus projetos, verificando o efeito da contribuição de cada variável aleatória no mecanismo de falha ao mesmo tempo em que, considerando o custo como variável aleatória, avaliar-se-ia também a segurança dos projetos em relação a possibilidade de soluções antieconômicas.

### 1.3. Organização da dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e um apêndice.

O primeiro capítulo introduz o trabalho e seus objetivos.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica sobre confiabilidade estrutural, apresentando trabalhos relevantes para o tema.

O terceiro capítulo apresenta as técnicas mais usuais no tratamento de situações de interferência carregamento-capacidade. Traz também uma análise comparativa entre diversos métodos de predição de confiabilidade, por meio de um exemplo básico que será resolvido segundo as diferentes abordagens dos métodos apresentados. Além disso, o capítulo apresenta conceitos de resistência mecânica que serão utilizados para descrever o modelo matemático a ser utilizado durante a fase de experimentação.

O quarto capítulo apresenta uma proposta de processo para realização de experimentos computacionais de simulações de confiabilidade em componentes

estruturais automotivos, quando submetidos a uma situação de interferência carregamento-capacidade.

O quinto capítulo apresenta os resultados de um experimento numérico feito a partir do processo proposto no quarto capítulo.

O sexto capítulo apresenta as conclusões finais do trabalho, além de sugestões para futuros trabalhos.

O apêndice traz alguns conceitos básicos de Probabilidade e Estatística necessários para o bom entendimento do tema da dissertação.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A primeira tentativa de questionar a incerteza nos parâmetros de projeto de componentes estruturais se deve a Mayer (1926). Em seu trabalho, o autor defendeu a utilização de procedimentos estatísticos para analisar a segurança de componentes estruturais. Posteriormente Wierzbick (1936) propôs os primeiros conceitos probabilísticos de segurança estrutural, onde considerou que as cargas solicitantes e outros parâmetros de resistência são variáveis aleatórias, dependentes ou não do tempo, e que, para cada estrutura, há sempre uma probabilidade não-nula de falha durante a sua vida útil.

O primeiro método de avaliação da interferência carregamento-capacidade foi o método FOSM (*First Order-Second Moment – Segundo momento de primeira ordem*), descrito por Cornel (1969) e Hasofer e Lind (1974), baseado no primeiro momento estatístico, que convergia para uma solução exata apenas em casos de problemas lineares com variáveis aleatórias normais.

Rackwitz e Fiessler (1978) introduziram o método FORM (*First Order Reliability Method – Método de confiabilidade de primeira ordem*), para lidar com variáveis aleatórias não normais, onde propuseram um índice de confiabilidade onde a variável aleatória podia ser avaliada por sua média e variância, ao invés de apenas sua média, na função de estado – limite do projeto. Além disso, também propuseram um método numérico iterativo, para o cálculo do índice de confiabilidade, que levava em consideração a função densidade de distribuição normal de probabilidade para todas as variáveis. No entanto, a própria definição das funções de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias era, e ainda é, um problema em aberto. A definição inadequada de tais funções gerava erros graves na determinação do índice de confiabilidade.

Fiessler et al.(1979) introduziram o método SORM (*Second Order Reliability Method – Método de confiabilidade de segunda ordem*), para lidar com problemas não - lineares, usando expansões quadráticas de Taylor para aproximar a superfície de falha em um ponto ótimo de projeto.

Melchers (1983) realçou a importância de considerar, em sistemas estruturais, a correlação entre as variáveis aleatórias para obter uma avaliação correta da probabilidade global de falha do sistema estrutural.

Zhou e Nowak, (1988) desenvolveram fórmulas para estimar momentos estatísticos usando pesos e pontos predeterminados no espaço padronizado, quando os métodos FOSM, FORM e SORM falham.

Madssen (1988) propôs um modelo onde definiu fatores de sensibilidade associados as variáveis aleatórias, em relação as suas contribuições a falha do sistema estrutural, reduzindo assim o número de variáveis aleatórias para apenas as mais relevantes, e o tempo de processamento computacional dos modelos de confiabilidade estrutural.

Rackwitz (2001) fez uma crítica dos métodos FOSM/FORM/SORM, apontando suas limitações com relação ao Método de Monte Carlo. O Método de Monte Carlo é um método de simples utilização, para calcular probabilidades de falha, mas requer um grande número de iterações para convergir com uma precisão aceitável.

Vários outros pesquisadores analisaram então os métodos FOSM/FORM/SORM com técnicas diversas de redução do número de iterações do Método de Monte Carlo: Técnica de amostragem do Hipercubo Latino, Técnica de Amostragem por Importância, Técnica de Simulação Direcional e Técnica de Amostragem Adaptativa. Gray (2006) modificou a técnica de amostragem adaptativa para permitir que a origem do domínio de amostragem não estivesse exclusivamente na região segura, mas também na região de falha.

Charumas (2008) introduziu a técnica de amostragem *Full-Failure*, onde utilizou uma variação da esperança condicional para definir a amostragem na região de falha, diminuindo o número de iterações requeridas pelo Método de Monte Carlo e aumentando a precisão do índice de confiabilidade.

Outros pesquisadores desenvolveram técnicas para obter expressões de funções estados - limite, quando estas não são explícitas, como YOUN et al. (2004) que introduziu o Método de Superfície de Respostas e DENG et al. (2005) que introduziu a utilização de Redes Neurais Artificiais.

As últimas pesquisas no campo de confiabilidade estrutural têm abordado a aplicação de algoritmos genéticos na determinação do índice de confiabilidade, por Lijie e Daichao (2005) e na resolução de análises de falha de barreira de domínio em problemas dependentes do tempo, por Beck e Melchers (2005), ou seja, onde a falha não é devida a variação da carga solicitante, mas da própria função estado - limite.

### 3. CONFIABILIDADE EM COMPONENTES AUTOMOTIVOS

Segundo Dhillon (1999), durante os anos 30, conceitos de probabilidade já eram utilizados em problemas de geração de energia elétrica. Mas foi apenas durante a segunda guerra mundial que a teoria da confiabilidade de sistemas começou a ser compilada: engenheiros alemães a usaram para melhorar a operacionalidade dos mísseis V1 e V2.

A partir da década de 60, a indústria começou a preocupar-se com a confiabilidade de seus produtos e equipamentos. Foram diversos os motivos: melhoria da imagem da marca, redução de custos de garantia, aumento da eficiência de produção, controle de segurança da produção e utilização dos produtos, entre outros. Surgiram então diversas áreas especializadas na aplicação da confiabilidade: Confiabilidade geral, Confiabilidade mecânica, Confiabilidade humana, Confiabilidade de sistemas, Confiabilidade estrutural, Confiabilidade da manutenção, entre outras.

A Confiabilidade Estrutural é a abordagem mais adequada para se avaliar a confiabilidade de um componente automotivo, visto que neste ramo é muito comum a existência de variabilidade dos parâmetros (também chamado de fatores) envolvidos no projeto. A Confiabilidade Estrutural mede a probabilidade da estrutura de violar um determinado estado - limite, ou seja, certa resistência a uma (várias) solicitação (ões). Quando uma estrutura viola seu estado - limite diz-se que houve uma falha estrutural (independente da estrutura ter colapsado). As formas com que uma estrutura ou um componente estrutural podem falhar dependem do tipo de carregamento, tipo do material, condições ambientais, tempo de vida, cuidados com manutenção, etc.

Para levar em conta tantas variações, durante o desenvolvimento de componentes automotivos, a Confiabilidade estrutural aborda o conceito Interferência Carregamento – Capacidade, onde parâmetros de projeto são modelados como variáveis aleatórias.

### 3.1. Interferência carregamento - capacidade

De acordo com o conceito Interferência Carregamento – Capacidade, parâmetros de projeto como dimensão, material e cargas aplicadas são modelados como variáveis aleatórias. Desse modo, sempre haverá a possibilidade de que o componente venha a falhar, ou seja, violar o estado - limite para o qual foi projetado, sob uma condição de carregamento  $S$  atuante menor que a máxima capacidade  $Q$  calculada. Tal condição está representada na Figura 3-1, através da interferência entre as curvas da função distribuição de probabilidade do carregamento  $S(\mathbf{X})$  e da função distribuição de probabilidade da capacidade  $Q(\mathbf{X})$ , sendo que  $\mathbf{X}$  representa o conjunto de parâmetros de projeto estatisticamente analisados. Os parâmetros  $S_s$  e  $S_q$  representam os respectivos desvios – padrão das funções  $S(\mathbf{X})$  e  $Q(\mathbf{X})$ .

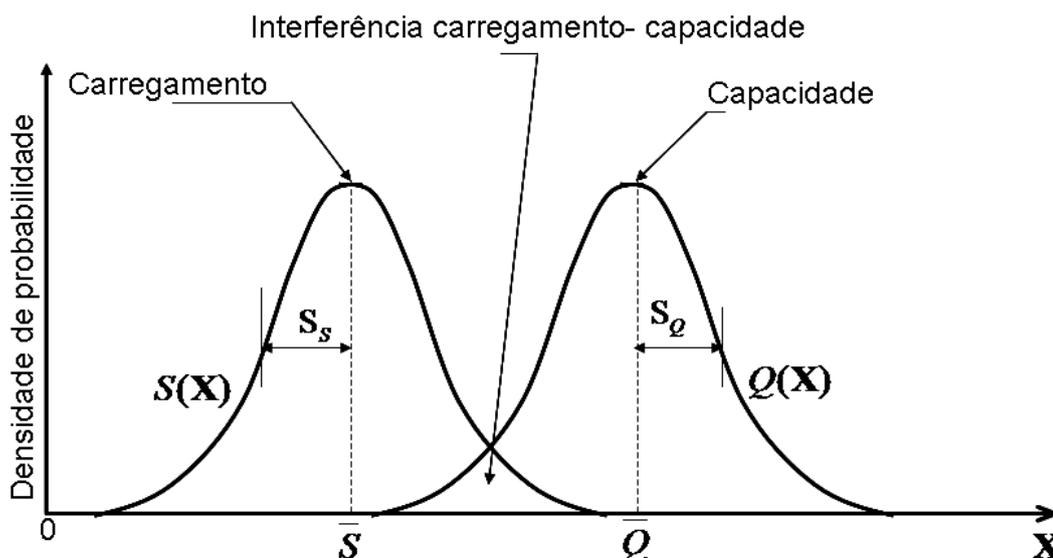


Figura 3-1: Conceito básico Interferência carregamento-capacidade (HOUGAZ, 2005)

Segundo Rosa (1994), a confiabilidade estrutural  $R(\mathbf{X})$  será o complemento da probabilidade do carregamento  $S(\mathbf{X})$  em superar a capacidade  $Q(\mathbf{X})$ , na zona de interferência carregamento-capacidade, ou seja

$$R(\mathbf{X}) = 1 - P([Q(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X})] < 0) \quad (3.1)$$

Segundo Rosowsky (1999), tal probabilidade será a própria probabilidade de falha do sistema e pode ser calculada como sendo

$$P([Q(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X})] < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\mathbf{X}) \left[ \int_{-\infty}^X Q(\xi) d\xi \right] d\mathbf{X} \quad (3.2)$$

Diferentemente de componentes eletrônicos, por exemplo, onde se admite a confiabilidade exponencialmente distribuída, componentes mecânicos possuem diferentes naturezas de mecanismos de falha, de forma que a distribuição exponencial é apenas uma das várias distribuições que podem ser utilizadas. As distribuições mais utilizadas para modelar a confiabilidade de problemas mecânicos são: Normal, Lognormal, Uniforme, Gamma e Weibull.

### 3.2. Mecanismos de falha e estado - limite

É muito importante conhecer a natureza do mecanismo de falha para corretamente identificar sua função de distribuição de probabilidade. Os mecanismos de falha podem ser independentes do tempo ou dependentes do tempo, como exemplificados na Tabela 3-1. Os mecanismos de falha independentes do tempo possuem igual probabilidade de ocorrer, qualquer que seja a vida ou tempo de uso do produto considerado, enquanto que os mecanismos de falha dependentes do tempo são afetados pelo tempo de uso do produto e são caracterizados por algum tipo de envelhecimento ou desgaste do material.

<b>Mecanismos de falha independentes do tempo</b>	<b>Mecanismos de falha dependentes do tempo</b>
Falha por escoamento	Fadiga
Fratura dúctil	Deformação plástica progressiva
Fratura frágil	Corrosão
Fratura na presença de defeitos	Corrosão sob tensão
Plastificação generalizada	Fluência
Fragilização por hidrogênio	Desgaste
Flambagem	
Deformação elástica excessiva	

Tabela 3-1 - Mecanismos de falha (ROSA, 1994)

Esta dissertação abordará o mecanismo de falha independente do tempo “Falha por escoamento”.

Ao se considerar um mecanismo de falha em particular, uma modelagem da incerteza deve ser considerada. Esta modelagem, representada matematicamente por uma função distribuição de probabilidade, deve ser realizada a partir de parâmetros de projeto cujas variabilidades aleatórias sejam significativas na ocorrência do mecanismo de falha.

Verzenhassi (2008) exemplificou variáveis aleatórias recorrentes em problemas de confiabilidade estrutural e suas funções de distribuição de probabilidade associadas (Tabela 3-2).

	<b>Tipo de variável aleatória</b>	<b>Distribuição</b>
<b>VA's de resistência</b>	Propriedades materiais do aço	Lognormal
	Parâmetros geométricos	Normal ou Lognormal
<b>VA's de solicitação</b>	Peso próprio	Normal
	Carga acidental	Gamma
	Vento (velocidade média)	Weibull

Tabela 3-2 - Exemplo de variáveis aleatórias e suas distribuições (VERZENHASSI, 2008)

Um estado – limite pode ser definido como a fronteira entre o desempenho desejado e o indesejado de uma estrutura. De forma genérica, uma função de estado - limite, em problemas de confiabilidade estrutural, é obtida a partir de parâmetros associados as capacidades de resistência e ao carregamento da estrutura. De forma compacta uma função de estado – limite pode ser definida pela equação

$$G(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}) \quad (3.3)$$

onde  $Q(\mathbf{X})$  é a capacidade de resistência do componente e  $S(\mathbf{X})$  o carregamento atuante, sendo  $\mathbf{X}^T = \{X_1, \dots, X_n\}$  um vetor de variáveis aleatórias que representam os mecanismos de falha.

Os mecanismos de falha são descritos através de uma superfície de estado - limite, que divide o domínio  $\Omega$  das variáveis do problema em um domínio de falha  $\Omega_f$  e um domínio seguro (de não falha)  $\Omega_s$ . Na Figura 3-2, a função  $G(X_1, X_2) = 0$  define uma curva de estado – limite para um problema com duas variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  resultado da interseção da superfície de estado - limite  $G(X_1, X_2)$ , com o plano

$(X_1, X_2)$ . A área sombreada  $G(X_1, X_2) < 0$  representa o domínio de falha, enquanto que a área  $G(X_1, X_2) > 0$  representa o domínio de segurança. A função  $f(X_1, X_2)$  é uma função distribuição de probabilidade conjunta e representa as respostas do componente estrutural para as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ .

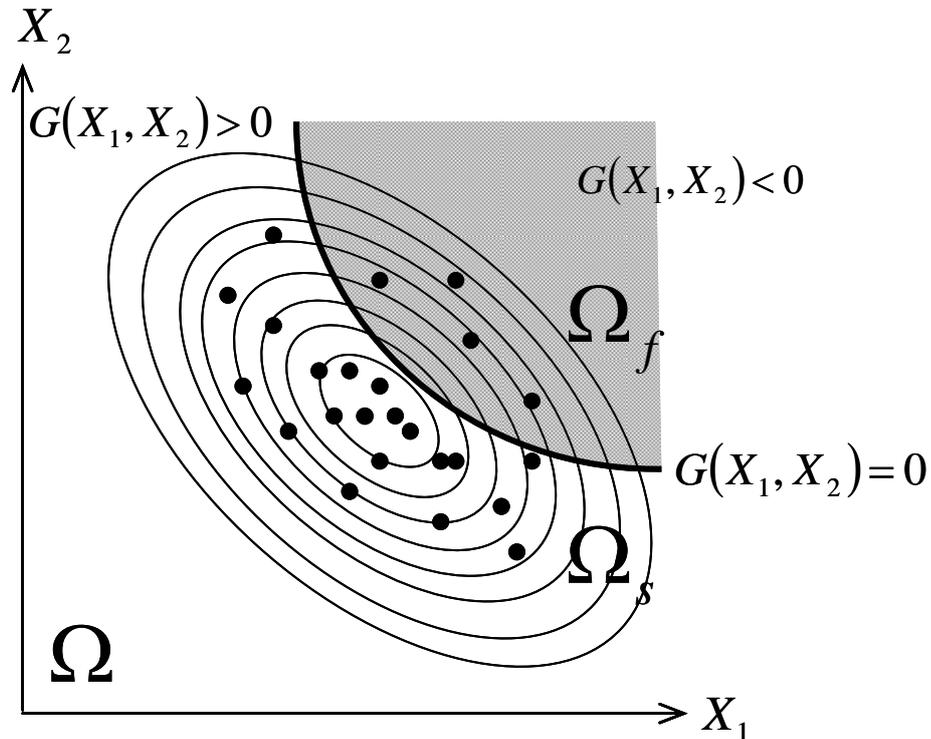


Figura 3-2 - Representação dos domínios de integração e superfície de estado - limite de dois parâmetros aleatórios,  $X_1$  e  $X_2$  (NOGUEIRA, 2005)

Dessa forma a equação (3.1) da confiabilidade estrutural  $R(\mathbf{X})$  pode ser re-escrita como sendo

$$R(\mathbf{X}) = 1 - P_f(\mathbf{X}) \quad (3.4)$$

sendo  $P_f(\mathbf{X})$  definida pela integração

$$P_f = \int_{\Omega_f} G(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (3.5)$$

onde  $G(\mathbf{X})$  é uma função distribuição de probabilidade conjunta dos parâmetros do projeto que representa o estado – limite do problema.

### 3.3. Definição da função distribuição de probabilidade conjunta

Uma das maiores dificuldades em resolver problemas de confiabilidade estrutural é o fato da função  $G(\mathbf{X})$  não ser conhecida. Um modelo deve ser construído a partir da informação probabilística conhecida. Para isto, Beck (2007) sugere a utilização do modelo de Nataf para o caso de duas variáveis aleatórias conhecidas  $X_1$  e  $X_2$ , com coeficiente de correlação  $\rho_{x_1x_2}$ , funções distribuição de probabilidade quaisquer  $S(x_1)$  e  $Q(x_2)$ , as respectivas variáveis aleatórias padronizadas  $Z_1$  e  $Z_2$  e suas funções distribuições de probabilidade normal  $\phi(z_1)$  e  $\phi(z_2)$ , além da função distribuição de probabilidade normal bivariada  $\phi_2(z_1, z_2, \rho_{x_1x_2})$ , conforme a equação:

$$G(X_1, X_2) = \phi_2(z_1, z_2, \rho_{x_1x_2}) \frac{S(x_1)Q(x_2)}{\phi(z_1)\phi(z_2)} \quad (3.6)$$

A Figura 3-3 exemplifica o modelo de Nataf para uma função distribuição de probabilidade conjunta de duas variáveis  $X_1$  e  $X_2$ , ambas com distribuição marginal uniforme no intervalo  $[-1,1]$  e coeficiente de correlação  $\rho_{x_1x_2} = 0,5$ , conforme Beck (2007).

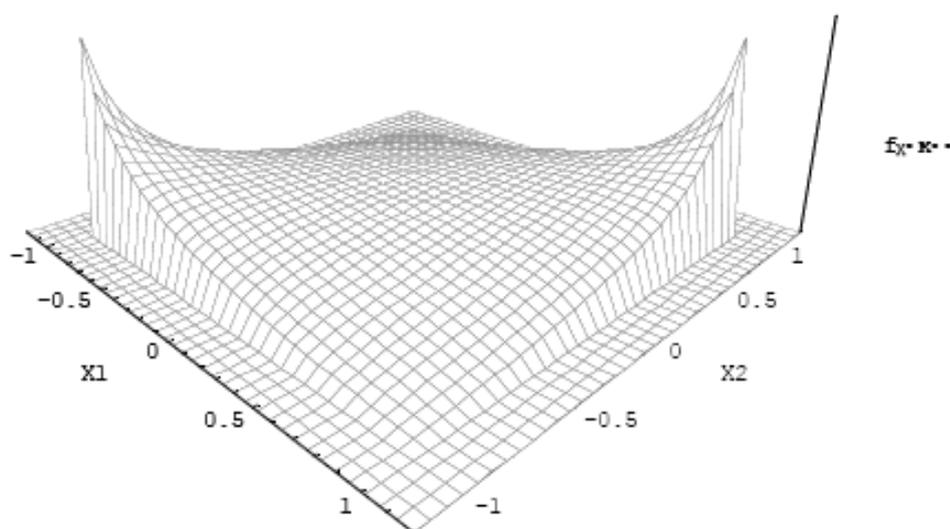


Figura 3-3 – Exemplo de modelo de Nataf (BECK, 2007)

Segundo Beck (1999), outras opções de métodos para determinação da função distribuição de probabilidade conjunta (mas que não serão abordados nesta dissertação) são:

- Transformação de Rosenblatt;
- Princípios de aproximação normal;
- Descorrelacionamento de variáveis aleatórias por autovalores;
- Descorrelacionamento de variáveis aleatórias por decomposição de Choleski;

Tais métodos estão detalhados em Beck (1999) e Nikolaidis et.al.(2005).

Na indústria automotiva, o meio mais usual de se determinar a função distribuição de probabilidade conjunta é o Método de superfície de respostas.

### 3.4. Método de Superfície de Resposta

O Método de Superfície de Resposta (MSR) é um método para determinar a função distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias do problema, baseado em um processo iterativo no qual são gerados conjuntos de valores determinísticos das variáveis aleatórias por meio de planos de experimentos. Um plano de experimento corresponde a um conjunto de possibilidades de ocorrências das variáveis aleatórias.

A Figura 3-4 ilustra alguns exemplos de planos de experimentos. Cada ponto de um plano de experimento representa uma combinação de valores (níveis) que as variáveis aleatórias (fatores) podem assumir. Em muitos experimentos é comum especificar tais pontos por meio de uma relação entre o desvio-padrão e o valor médio dos fatores envolvidos, como mostram os exemplos da Figura 3-4.

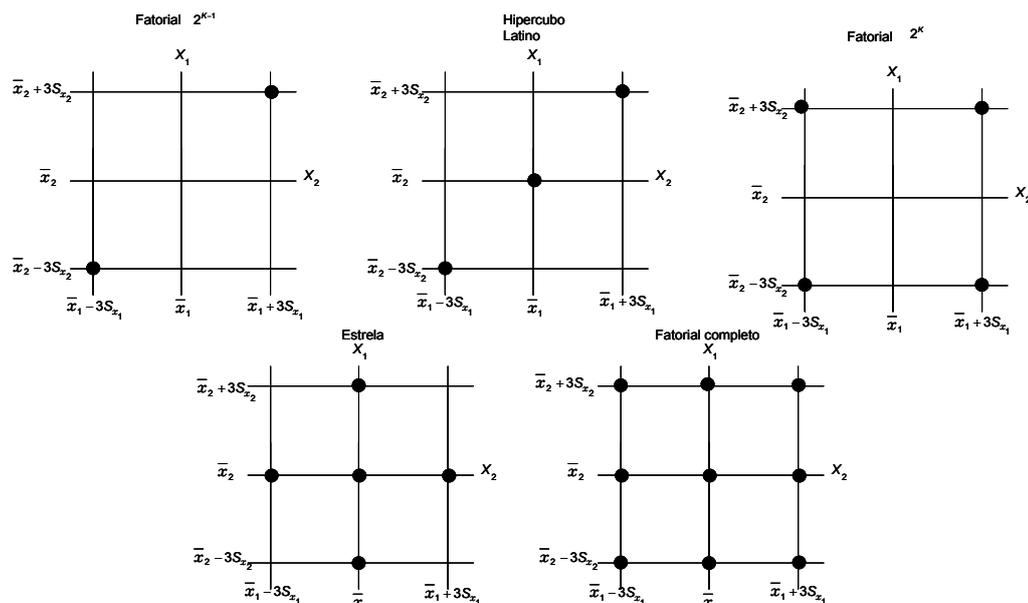


Figura 3-4: Exemplos de planos de experimentos

Segundo Nogueira (2005) não é possível afirmar qual plano de experimento é o melhor para determinar a função distribuição de probabilidade conjunta. Desta forma, não existe um processo formal de escolha do plano de experimento mais apropriado. Por isso, entre os diversos planos de experimentos possíveis, os mais utilizados na indústria automotiva são o Fatorial  $2^{K-1}$  e o Fatorial  $2^K$ , onde apenas os valores máximos e mínimos das variáveis aleatórias são levados em conta. Tais escolhas devem-se ao fato de que, como na indústria automotiva os experimentos têm alto custo operacional, sejam os experimentos físicos ou numéricos, o plano de experimento adotado deve ter um mínimo número de pontos possível para determinar a função da superfície de resposta. Já no meio acadêmico, não é incomum que sejam utilizados vários planos de experimento simultaneamente. Neste caso, a escolha final do plano de experimento é feita por meio de testes de convergência.

No presente trabalho, a geração dos planos de experimento será efetuada por meio do programa computacional *Minitab*® 15. Entre os vários programas computacionais de estatística disponíveis hoje no mercado, como o *Statistica*®, *Stata*®, *Statgraphics*®, *EViews*®, *GAUSS*®, entre outros, o *Minitab*® 15, da *Minitab Inc.* destaca-se na indústria automotiva, especialmente como ferramenta de apoio na aplicação da metodologia *Six Sigma*®<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> A metodologia Six Sigma é um método estruturado para implementação da melhoria contínua e está fora do escopo deste trabalho.

### 3.4.1. Redução do número de fatores de um experimento

Outra razão para se utilizar os planos de experimento Fatorial  $2^{K-1}$  e Fatorial  $2^K$  é que eles permitem que se identifique facilmente que fatores não são importantes para a determinação da função superfície de resposta. Assim, tais fatores podem ser desprezados e uma menor quantidade de experimentos será necessária para determinar a função superfície de resposta.

A identificação dos fatores não - importantes é feito por meio de duas análises, baseados no método ANOVA<sup>2</sup>:

1. Análise de fatores principais – mostra como os fatores são afetados pelos seus níveis possíveis. Em um plano de experimento Fatorial  $2^K$  ou Fatorial  $2^{K-1}$ , cada fator possui apenas dois níveis: o mínimo valor, representado simbolicamente por -1, e o máximo valor, representado por +1. Para cada um destes níveis, calcula-se uma resposta associada. Quanto maior for a diferença entre as respostas associadas, maior será a importância da variável. Uma variável não - importante terá uma diferença nula. A Figura 3-5 apresenta um exemplo de análise de fatores principais para três fatores quaisquer  $X_1, X_2, X_3$ .

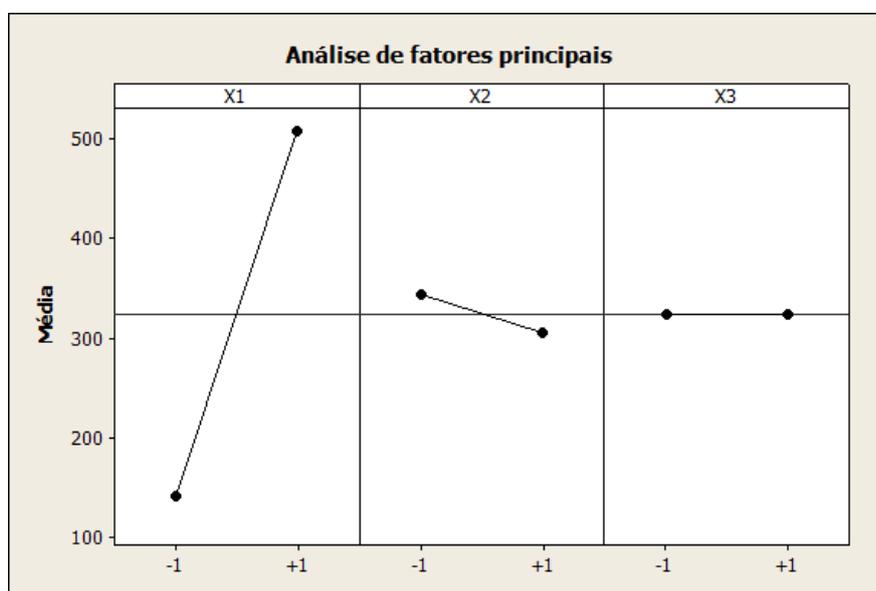


Figura 3-5: Análise de fatores principais para três fatores quaisquer

<sup>2</sup> A dedução do método ANOVA está fora do escopo desta dissertação, mas pode ser verificada em (SPIEGEL, 1978).

De acordo com a Figura 3-5, O fator X1 pode ser considerado como muito importante e não deve ser desprezado. O fator X2 pode ser considerado como moderadamente importante e pode ser desprezado se a Análise de Pareto das Interações não identificar qualquer interação importante. O fator X3 pode ser considerado como não - importante e pode ser desprezado.

2. Análise de Pareto das Interações – uma questão importante é que mesmo que um fator seja considerado não - importante ou moderadamente importante pela análise de fatores principais, pode ser que ela seja importante em uma combinação. Assim, também é necessário verificar suas combinações possíveis. A análise de Pareto usa o limite de Lenth para identificar as combinações não - importantes, que não cruzam tal limite. A Figura 3-6 apresenta um exemplo de análise de Pareto das interações para três fatores quaisquer.

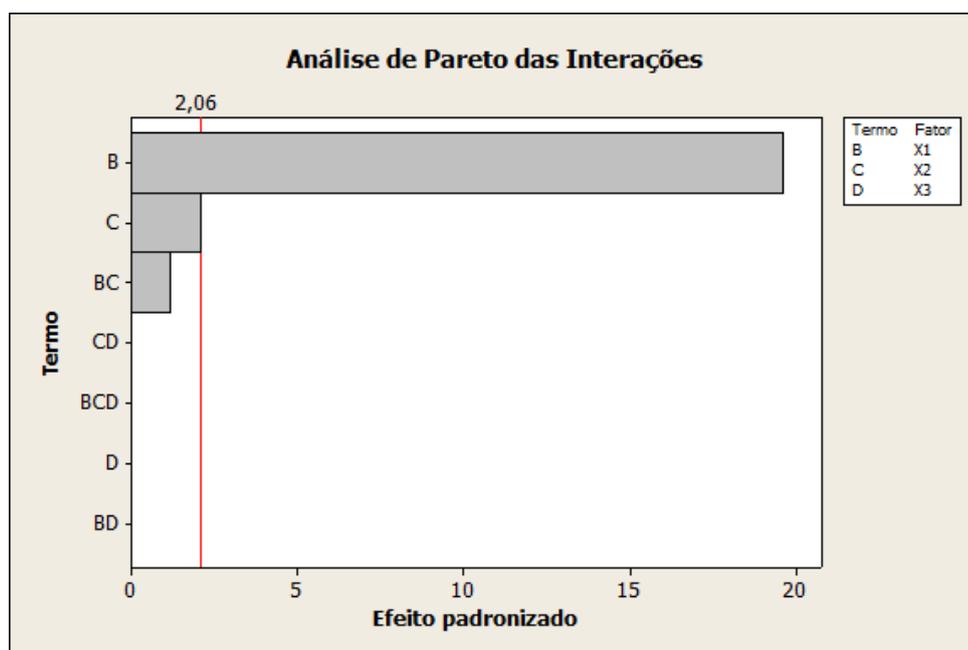


Figura 3-6: Análise de Pareto das Interações

O Limite de Lenth é baseado na idéia de que a variação dos menores efeitos é devido a erros aleatórios, sendo calculado da seguinte forma, conforme Lenth (1989):

1. Calcula-se o efeito<sup>3</sup>  $e_f$  de cada fator, o efeito médio  $\bar{e}_f$  e o valor de  $t_1$ , tal que

$$t_1 = 1,5\bar{e}_f \quad (3.7)$$

<sup>3</sup> O efeito de um fator vem a ser um grau de importância em relação a outros fatores e está relacionado diretamente com a determinação do valor-P de cada fator. A dedução do efeito e do valor-P está fora do escopo desta dissertação, mas pode ser verificada na documentação do programa computacional Minitab© 15 Ou em (SPIEGEL, 1978).

2. Determina-se a mediana  $t_2$  dos efeitos menores que  $2,5t_1$ , tal que

$$t_2 = \text{mediana}(< 2,5t_1) \quad (3.8)$$

3. Calcula-se o pseudo - erro estatístico PSE<sup>4</sup>, tal que

$$\text{PSE} = 1,5t_2 \quad (3.9)$$

4. Calcula-se então o limite de Lenth, tal que

$$\text{Limite de Lenth} = t \cdot \text{PSE} \quad (3.10)$$

onde  $t$  é o valor da distribuição  $t$  de student<sup>5</sup> para o valor  $(1 - \frac{\alpha_s}{2})$ , com graus de liberdade igual a um terço do número de efeitos  $e_t$  e  $\alpha_s$  vem a ser a probabilidade de se cometer um “erro do tipo 1”<sup>6</sup> na determinação dos fatores principais;

5. Compara-se então o Limite de Lenth com os valores dos efeitos padronizados  $e_z$ , tal que

$$e_z = \frac{e_t - \bar{e}_t}{S_{e_t}} \quad (3.11)$$

onde  $S_{e_t}$  é o desvio padrão dos efeitos e  $\bar{e}_t$  é a média dos efeitos.

De acordo com a Figura 3-6, o efeito padronizado do fator X1 cruza o limite de Lenth (igual a 2,06) e não deve ser desprezado. O efeito padronizado do fator X2 não cruza o limite de Lenth, nem as suas interações. Logo, pode ser desprezado. O efeito padronizado do fator X3 também não cruza o limite de Lenth, nem as suas interações. Logo, também pode ser desprezado.

---

<sup>4</sup> O PSE não é verdadeiramente um erro estatístico, mas apenas uma consideração utilizada durante a determinação do limite de Lenth;

<sup>5</sup> A distribuição  $t$  de student não foi abordada nesta dissertação, mas pode ser verificada em (SPIEGEL, 1978);

<sup>6</sup> O “erro tipo 1” vem a ser a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Na indústria automotiva é comum tratar tal erro como sendo o ‘risco do produtor’, ou seja é a probabilidade do produtor em identificar um produto bom como sendo ruim e não vendê-lo ao mercado. Já o “erro tipo 2” vem a ser a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa. Na indústria automotiva trata-se tal erro como sendo o ‘risco do consumidor’, ou seja, é a probabilidade de não se identificar um produto ruim e vendê-lo ao mercado;

### 3.4.2. Método de Superfície de Respostas por MARS

Cada ponto de um plano de experimento corresponde a uma possibilidade de combinação das variáveis aleatórias envolvidas. Com tais dados é possível determinar a função superfície de resposta por meio de um método de regressão. Os métodos de regressão mais comumente utilizados na indústria automotiva são: Expansão polinomial de primeiro grau (indicado para modelos lineares), Expansão polinomial de segundo grau (indicado para modelos não - lineares), e o MARS (*Multivariate Adaptive Regression Splines* - Método Adaptativo de Regressão por Splines multi - variáveis). Para problemas de confiabilidade estrutural, o método mais recomendado é o MARS.

Segundo Friedman (1990), o método MARS é um método de regressão com a forma de uma expansão de funções baseadas em splines e é capaz de gerar modelos contínuos com derivadas contínuas baseado em moderado número de fatores ( $3 \leq n \leq 20$ ) e elevado número de níveis ( $50 \leq N \leq 1000$ ). Como método adaptativo, o MARS dinamicamente corrige sua estratégia de geração de funções baseado no próprio comportamento do problema abordado.

Segundo Nogueira (2005), quando utilizadas expansões polinomiais de primeira ou segunda ordem, a superfície de respostas deve ser construída com fatores padronizados, determinados pela equação de padronização (A.11), enquanto que as repostas devem permanecer não-padronizadas. Já o Método MARS, dispensa tais padronizações. Os métodos de expansão polinomial podem ser verificados em Melchers (1999) e Nikolaidis et al. (2005).

Segundo Friedman (1990), o MARS é um melhoramento do método de regressão de partição recursiva cujo modelo tem a forma da expansão de funções – base abaixo

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M a_m B_m(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

tal qual as funções - base seguem a forma

$$B_m(\mathbf{x}) = I_c[\mathbf{x} \in \mathbb{R}_m] \quad (3.13)$$

onde  $I_c$  é uma função característica que pode assumir o valor igual a um, se o argumento for verdadeiro, ou zero em caso contrário. O conjunto  $\{a_m\}_1^M$  é formado pelos coeficientes da expansão cujos valores proporcionam os melhores ajustes

para os dados, ao passo que  $\{\mathbb{R}_m\}_1^M$  é formado por sub - limites disjuntos que representam uma partição do domínio  $D$ .

Como método adaptativo, o método de regressão de partição recursiva utiliza os próprios dados de entrada para simultaneamente estimar o conjunto de sub - limites e os coeficientes associados as funções para cada sub – limite, ajustando tais coeficientes para os melhores valores possíveis.

Friedman et al. (1984) apresentou um algoritmo capaz de mudar a forma das funções - base para

$$B_m(\mathbf{x}) = \prod_{k_m=1}^{K_m} H[s_{k_m} \cdot (x_{v(k,m)} - t_{k_m})] \quad (3.14)$$

baseado apenas nos dados de entrada e em uma função - degrau  $H(\eta)$  tal que,

$$H(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta > 0 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad (3.15)$$

onde a quantidade  $K_m$  é o número de divisões que deram origem a  $B_m$ , ao passo que os argumentos das funções-degrau contêm os parâmetros associados com cada uma destas divisões. As quantidades  $s_{k_m}$  assumem o valor de  $\pm 1$  e indicam o sentido da função-degrau associada,  $x_{v(k,m)}$  representa as variáveis de entrada e  $t_{k_m}$  representa seus valores correspondentes.

Mesmo assim, o método de regressão de partição recursiva ainda possuía uma grande limitação, que era a falta de continuidade. Os modelos produzidos pelo método eram constantes e descontínuos nas vizinhanças das sub – regiões, devido ao uso de funções-degrau. Se tais funções fossem substituídas por funções contínuas, o resultado também seria contínuo. Friedman (1990) propôs então substituir a função-degrau por uma função contínua, já que a função - degrau é um caso especial de uma função-base spline.

A partir então de uma função - base de potência bilateralmente truncada tal qual

$$b_q^\pm(x - t) = [\pm(x - t)]_+^q \quad (3.16)$$

Friedman (1990) apresentou o algoritmo de MARS, modificando sua função – base para a forma apresentada abaixo

$$B_m^{(q)}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{K_m} [s_{km} \cdot (x_{v(k,m)} - t_{km})]_+^q \quad (3.17)$$

enquanto que a equação (3.12) assumiu a forma

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m \prod_{k=1}^{K_m} [s_{km} \cdot (x_{v(k,m)} - t_{km})]_+^q \quad (3.18)$$

onde  $a_0$  é o coeficiente da função-base constante  $B_1$ .

A equação (3.16) representa uma spline de  $q$ -ésima ordem, onde  $t$  é a localização do nó,  $q$  é a ordem da spline e o subscrito  $+$  indica a parte positiva do argumento.

Para  $q > 0$ , a aproximação do spline é contínua e tem  $(q - 1)$  derivadas contínuas.

Para um valor  $q = 1$ , o modelo MARS assume sua forma mais comumente utilizada

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m \prod_{k=1}^{K_m} [s_{km} \cdot (x_{v(k,m)} - t_{km})]_+ \quad (3.19)$$

No presente trabalho, a determinação da função superfície de resposta pelo método MARS será feita com o auxílio do programa computacional *Encore*© 5.0.

O *Encore*© 5.0 é parte de uma iniciativa da *Ford Motor Company*© para incentivar a utilização do conceito de interferência carregamento-capacidade no desenvolvimento de produtos automotivos. O programa computacional é inteiramente escrito na linguagem computacional *JAVA*© e, além de realizar as simulações de Método de superfície de resposta por meio dos métodos MARS e expansão polinomial de primeiro e segundo grau, realiza também as simulações de predição de confiabilidade por meio dos métodos FORM, SORM, Monte Carlo Simples, Monte Carlo com Amostragem por Importância e Monte Carlo por Hipercubo Latino.

### 3.4.3. Validação da função superfície de resposta

O modelo de MARS pode também ser escrito por meio de uma decomposição ANOVA, tal qual

$$\hat{f}(X) = a_0 + \sum_{K_m=1} f_i(x_i) + \sum_{K_m=2} f_{ij}(x_i, x_j) + \sum_{K_m=3} f_{ijk}(x_i, x_j, x_k) + \dots \quad (3.20)$$

onde a primeira soma representa funções – base de apenas uma variável,

$$f_i(x_i) = \sum_{\substack{K_m=1 \\ i \in V(m)}} a_m B_m(x_i) \quad (3.21)$$

a segunda soma representa funções – base de duas variáveis,

$$f_i(x_i, x_j) = \sum_{\substack{K_m=2 \\ (i,j) \in V(m)}} a_m B_m(x_i, x_j) \quad (3.22)$$

a terceira soma representa funções – base de três variáveis,

$$f_i(x_i, x_j, x_k) = \sum_{\substack{K_m=3 \\ (i,j,k) \in V(m)}} a_m B_m(x_i, x_j, x_k) \quad (3.23)$$

e assim por diante. Nestas equações,  $V(m) = \{v(k, m)\}_1^{K_m}$  será um conjunto de variáveis associadas com a função (3.20).

Uma vantagem da utilização da equação (3.20) é que a mesma permite facilmente identificar as variáveis que participam do modelo, seus graus de importância e de suas interações. Outra vantagem é que, independentemente do plano de experimento escolhido ou do próprio método de regressão escolhido, a função superfície de resposta será validada caso sejam válidas as hipóteses do método ANOVA:

- Hipótese 01 (Normalidade dos resíduos) – os resíduos (diferenças entre os resultados de cada experimento físico e/ou numérico e seus ajustes, ou seja, os mesmos resultados re-calculados por meio da função superfície de resposta) seguem uma distribuição normal;
- Hipótese 02 (Controle estatístico dos resíduos) - os resíduos não variam devido a presença de causas especiais;
- Hipótese 03 (Independência dos resíduos) - os resíduos não possuem relação linear, ou de qualquer outro tipo, em relação aos ajustes.

Tais três hipóteses podem ser visualmente verificadas por meio de quatro testes:

1. Verificação de normalidade – deve mostrar que os resíduos formam aproximadamente uma linha reta e inclinada, confirmando a hipótese da normalidade dos resíduos;
2. Histograma de resíduos – deve mostrar que a frequência dos resíduos forma aproximadamente uma curva em forma de sino, com centro em zero, confirmando a hipótese da normalidade dos resíduos;

3. Ordem de observação x Resíduos – deve mostrar que a variação dos resíduos não sugere a presença de causas especiais, confirmando a hipótese de que os resíduos estão estatisticamente controlados;
4. Ajustes x Resíduos – deve mostrar que os resíduos estão dispersos aleatoriamente em torno do zero, confirmando a hipótese de que os resíduos não variam linearmente (ou de outro tipo) em relação aos ajustes.

A Figura 3-7 mostra um exemplo dos testes realizados e aprovados, para uma função superfície de resposta qualquer.

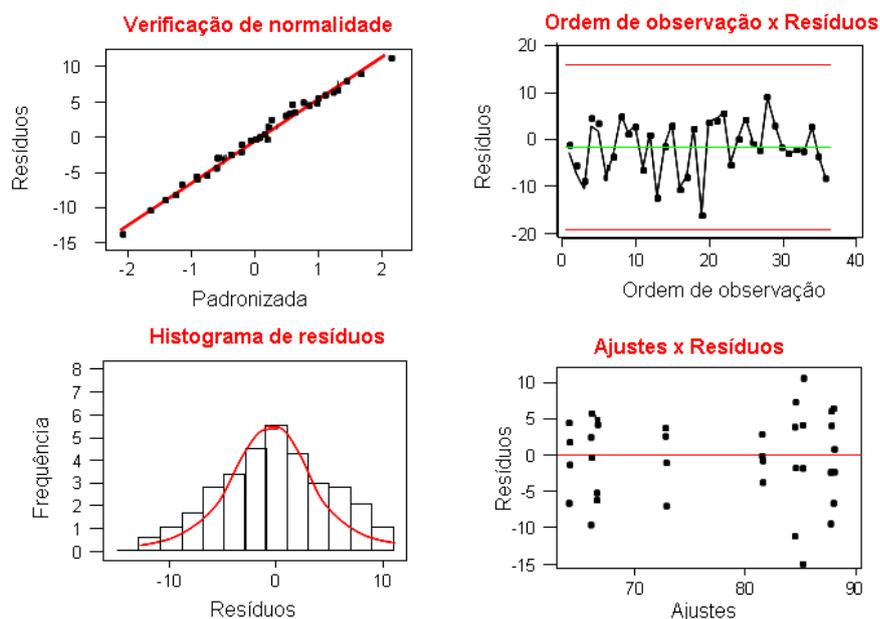


Figura 3-7: Exemplo de testes de ANOVA para uma função superfície de resposta qualquer.

### 3.5. Método FOSM de predição de confiabilidade

As dificuldades em calcular a equação (3.2) motivaram o desenvolvimento dos métodos de predição de confiabilidade FOSM, FORM, e SORM. O primeiro deles, o método FOSM, foi desenvolvido por Cornell (1969) e se tornou bastante popular por sua simplicidade. Tal método representa o caso onde a capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e o carregamento  $S(\mathbf{X})$  possuem distribuição normal, que é uma situação bastante comum no dimensionamento de componentes automotivos.

Considerando que a capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e o carregamento  $S(\mathbf{X})$  são funções contínuas do tipo  $Y = h(X_1, \dots, X_n)$  onde  $(X_1, \dots, X_n)$  são variáveis aleatórias com médias  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  e desvios - padrão  $(S_{X_1}, \dots, S_{X_n})$  conhecidos, pode-se usar uma expansão de Taylor para aproximar a função  $Y$  em razão das médias e variâncias das variáveis aleatórias

$$Y = h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial X_i} (X_i - \bar{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial X_i^2} (X_i - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i>j}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial X_i \partial X_j} (X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j) \quad (3.24)$$

onde todas as derivadas parciais são calculadas nos valores médios de  $X_n$ .

Assim, os valores médios da capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e do carregamento  $S(\mathbf{X})$  podem ser aproximados pela equação

$$\bar{y} \cong h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad (3.25)$$

enquanto que as variâncias da capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e do carregamento  $S(\mathbf{X})$  são aproximadas pela equação

$$S_Y^2 \cong \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial X_i} \right)^2 S_{X_i}^2 \right] \quad (3.26)$$

Determinadas as médias e variâncias da capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e do carregamento  $S(\mathbf{X})$ , calcula-se o índice de confiabilidade  $\beta$ , tal que

$$\beta = \frac{\bar{Q} - \bar{S}}{\sqrt{S_Q^2 + S_S^2}} \quad (3.27)$$

A probabilidade de falha  $P_f$  é calculada pela equação

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.28)$$

onde  $\Phi(x)$  é a função distribuição cumulativa normal de probabilidade, tal que

$$\Phi^{-1}(P_f) = -\beta \quad (3.29)$$

A confiabilidade pode então ser determinada pela equação (3.4).

Kececioglu e Wei (2005) salientaram que a expansão de Taylor, reduzida ao primeiro termo como apresentada neste trabalho, conduz o cálculo da confiabilidade

a um erro aceitável em muitos projetos de engenharia. Contudo, em situações mais complexas devem-se usar mais termos para calcular a probabilidade de falha.

Cornell (1969) também apresentou formulações para quando a capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e/ou o carregamento  $S(\mathbf{X})$  possuem distribuição Lognormal, enquanto que Dhillon (1999) apresentou formulações para quando a capacidade  $Q(\mathbf{X})$  e/ou o carregamento  $S(\mathbf{X})$  possuem distribuição exponencial.

A aplicação do método FOSM é limitada a existência de uma função de estado - limite linear e contínua. Na indústria automotiva, não é usual encontrar aplicações do método.

### 3.6. Método FORM de predição de confiabilidade

Quando não há possibilidade de se determinar a confiabilidade do componente de forma direta, usando-se a equação (3.4), ou ainda o método FOSM, podem-se utilizar os métodos FORM ou SORM, ou ainda o método de Monte Carlo. O método FORM (*First Order Reliability Method – Método de confiabilidade de primeira ordem*) determina a probabilidade de falha por meio da determinação do índice de confiabilidade  $\beta$ , através do mapeamento  $T: X(X_1, X_2, \dots, X_n) \rightarrow Z(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  das variáveis aleatórias  $X_i$  para o domínio normal padronizado, usando a equação de padronização (3.30).

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \quad (3.30)$$

Com esta transformação, tanto a função distribuição de probabilidade conjunta quanto a função estado - limite adquirem uma simetria radial e o ponto de projeto (PP), possuidor da menor distância em relação ao centro de coordenadas padronizadas, corresponderá a um ponto da reta tangente a função de estado - limite.

A função do estado - limite é representada pela equação

$$G(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i + \beta = 0 \quad (3.31)$$

onde  $z_i$  representa a coordenada de  $Z_i$  no ponto de projeto,  $\beta$  representa o índice de confiabilidade e  $\alpha$  é um vetor unitário normal a superfície de estado - limite no ponto de projeto. Os pontos  $\alpha_i$  são também conhecidos como fatores de sensibilidade, que fornecem uma indicação da importância relativa da incerteza nas variáveis de projeto na confiabilidade calculada. Os valores de  $\alpha_i$  variam entre zero e um e quanto mais próximo de um, mais significativa é a influência da respectiva variável aleatória para a confiabilidade.

Um exemplo das funções distribuição de probabilidade no domínio físico e no domínio padronizado é mostrado na Figura 3-8.

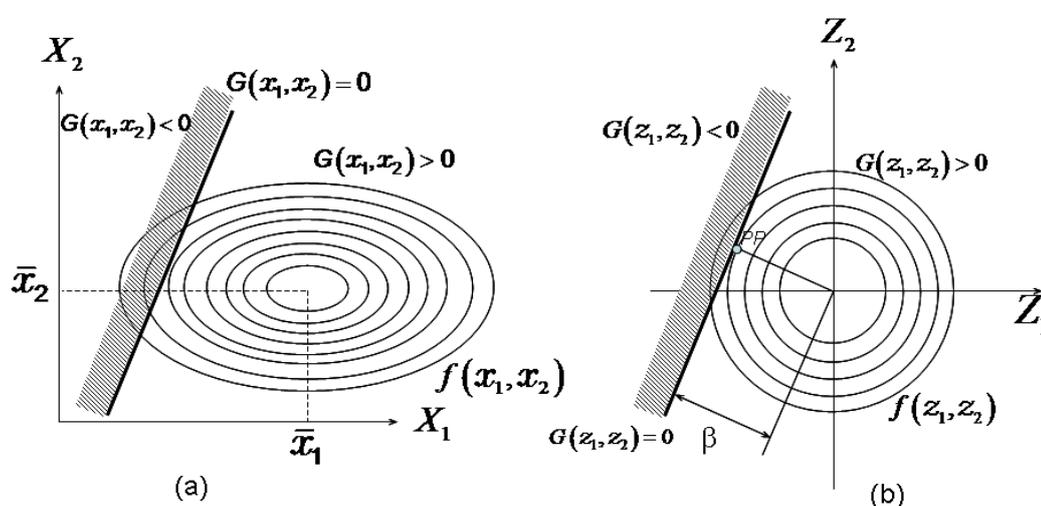


Figura 3-8 : a) Função distribuição de probabilidade conjunta no domínio real; (b) Função distribuição de probabilidade conjunta no domínio padronizado (VERZENHASSI, 2008)

Determinado o ponto de projeto, o índice de confiabilidade  $\beta$  é definido pela equação

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2} \quad (3.32)$$

enquanto que a probabilidade de falha é calculada pela equação (3.28) e confiabilidade pela equação (3.4).

Uma questão crucial no método FORM é a determinação do ponto de projeto. O método mais utilizado para isto é o algoritmo descrito a seguir, conforme Rackwitz e Fiessler (1978):

1. Escolha do ponto inicial  $\{z_i^0\}$ . Usualmente adota-se a origem do espaço normal padrão

$$\{z_i^0\} = \{0\} \quad (3.33)$$

2. Cálculo da função de estado – limite no ponto  $\{z_i^k\}$

$$G^k = G(z_1^k, \dots, z_n^k) \quad (3.34)$$

3. Cálculo do vetor gradiente da função estado - limite  $\{\nabla G_i^k\}$

$$\{\nabla G_i^k\} = \left. \frac{\partial G(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_i} \right| \quad (3.35)$$

4. Cálculo da norma  $\|\nabla G\|^k$  do vetor gradiente da função estado - limite  $\{\nabla G_i^k\}$

$$\|\nabla G\|^k = \sqrt{(z_1)^2 + \dots + (z_n)^2} \quad (3.36)$$

5. Cálculo do vetor  $\{\alpha_i^k\}$  de co-senos diretores

$$\{\alpha_i^k\} = \frac{\nabla G_i^k}{\|\nabla G\|^k} \quad (3.37)$$

6. Cálculo do índice de confiabilidade  $\beta^k$

$$\beta^k = \frac{G^k - \{\nabla G_i^k\} \{z_i^k\}}{\|\nabla G\|^k} \quad (3.38)$$

7. Cálculo do próximo ponto  $\{z_i^{k+1}\}$

$$\{z_i^{k+1}\} = -\beta^k \{\alpha_i^k\} \quad (3.39)$$

8. Repetem-se os passos 2 a 5 até atingir a convergência, isto é , quando dois valores de índice de confiabilidade consecutivos forem iguais ou satisfizerem uma tolerância pré-estabelecida , em geral menor que 1%. Outra verificação é que, no ponto de projeto, a função estado - limite resulta nula.

O método FORM tem precisão razoável em problemas onde a curvatura da função da superfície de falha é pequena. Uma idéia do erro cometido é mostrada na Figura 3-9, onde se utiliza a linearização FORM da superfície de falha. Neste caso, o erro será considerado como sendo igual a zero no ponto de projeto PP, enquanto que em um ponto PP' haverá um erro relativo a diferença entre  $\beta$  e  $\beta'$ . Além disso, vê-se

também que o erro cometido utilizando o método FORM para superfícies de falha côncavas é a favor da segurança, enquanto que em superfícies convexas é contra a segurança.

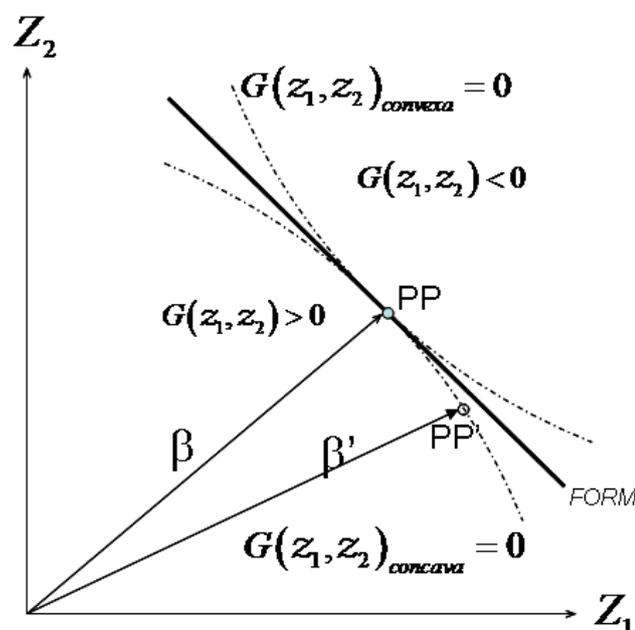


Figura 3-9 – Erro entre superfícies de falha côncavas e convexas (SOARES, 2002)

Segundo Beck (1999) a aproximação obtida pelo método FORM converge para uma solução exata a medida que  $\beta$  aumenta. Por outro lado o erro em FORM aumenta a medida que aumenta o número de variáveis aleatórias do problema.

### 3.7. Método SORM de predição de confiabilidade

Apesar do reconhecimento de que o método FORM funciona bem em muitos problemas práticos, não há garantia de convergência do método para problemas com funções estado - limite não - lineares. O método SORM (*Second Order Reliability method – Método de confiabilidade de segunda ordem*) foi proposto por (FIESSLER et al., 1979) para melhorar a estimativa da confiabilidade de um estado - limite não - linear, usando uma expansão de Taylor de segunda ordem no ponto de projeto (PP) ao invés de uma aproximação linear. Dessa forma, o único procedimento adicional em relação ao FORM seria calcular a matriz hessiana  $H_i$  da função estado - limite.

O SORM é representado na fórmula

$$P_f = \Phi(-\beta_{form}) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{form} H_i)^{-1/2} \quad (3.40)$$

tal que

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G(x_1)}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 G(x_i)}{\partial X_1 X_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 G(x_1)}{\partial X_i X_1} & \dots & \frac{\partial^2 G(x_i)}{\partial X_i^2} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A Figura 3-10 demonstra a diferença entre o FORM e o SORM.

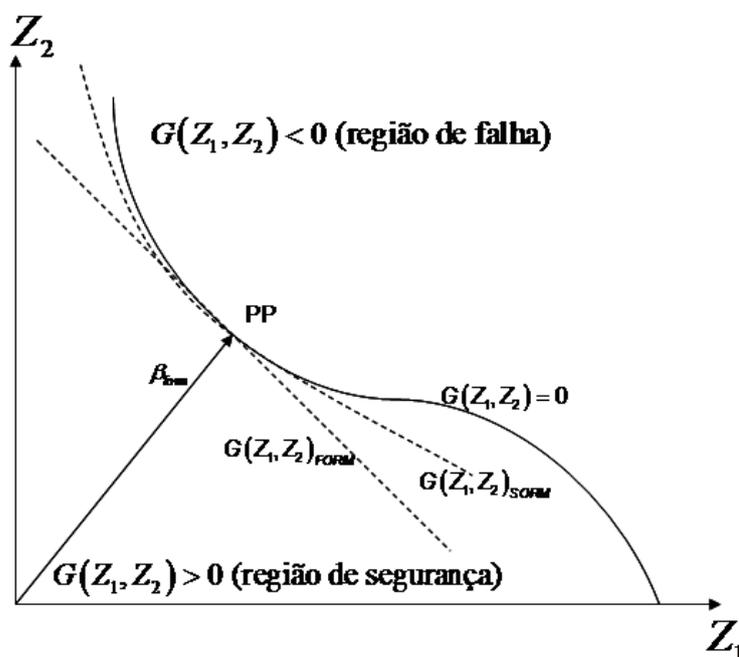


Figura 3-10: Superfície de falha de FORM e SORM (SOARES, 2002)

No método SORM, a função de estado - limite é tratada como uma superfície de segundo grau, requerendo o conhecimento de suas curvaturas principais além do índice de confiabilidade. No ponto de projeto a superfície deve ser contínua e duas vezes diferenciável, além de ter o mesmo plano tangente e a mesma curvatura principal que a função do estado - limite.

No presente trabalho, as aplicações dos métodos FORM e SORM serão feitas com o auxílio do programa computacional *Encore*© 5.0, brevemente descrita na seção 3.4.2.

### 3.8. Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo foi desenvolvido durante os anos 40 por Stanislaw Ulam, cientista do *Los Alamos National Laboratory*, durante o desenvolvimento do primeiro computador, o ENIAC, o que permitiu a utilização de números pseudo-aleatórios e abordagem estatística para avaliação de implosões (e explosões). Em 1947, junto com John Von Neuman, Ulam utilizou o método para resolver o problema da difusão de nêutrons durante fissões nucleares. Em 1949, Ulam, juntamente com Nicholas Metropolis, publicou o célebre artigo "O Método de Monte Carlo" na revista *Journal of the American Statistical Association*. O nome, dado por Metropolis, é uma referência ao cassino de Monte Carlo, devido a natureza aleatória e repetitiva do método, similar aos jogos de azar. Desde então o método tem sido utilizado nos diversos campos da física, química, biologia, finanças e pesquisa operacional, tornando-se bastante popular.

Contudo, hoje é sabido que o método já havia sido concebido anteriormente a Ulam, mas era de pouca utilização devido ao longo e entediante processo. Em 1930, segundo Metropolis (1987), Enrico Fermi utilizou o método para determinar as propriedades do recém - descoberto nêutron.

O Método de Monte Carlo é preferencialmente usado quando se torna difícil calcular uma resposta exata para problemas com fatores aleatórios, baseado em um algoritmo determinístico. O Método de Monte Carlo baseia-se na geração de números aleatórios para calcular expressões matemáticas, especialmente em sistemas com grande número de graus de liberdade como em fluido-dinâmica, avaliação de materiais e estruturas celulares, entre outros. Uma utilização clássica é o uso para resolução de integrais definidas, especialmente integrais multidimensionais com complicadas condições de contorno.

Existem diversos modelos de resolução do MMC, sendo mais utilizados em problemas de confiabilidade estrutural os métodos simples, amostragem por importância e Hipercubo Latino.

### 3.8.1. Método de Monte Carlo Simples (MMCS)

O método de Monte Carlo Simples é um método de rápida programação, porém, com utilização restrita devido a seu alto custo computacional, caracterizando-se por não utilizar nenhuma técnica de redução de amostragem. Baseado em teoria probabilística, o método utiliza a simplificação abaixo para calcular uma estimativa da integral de uma função  $f(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X}^T = \{X_1, \dots, X_n\}$  é um vetor de variáveis aleatórias, em relação a um volume  $V$  e ao domínio de integração  $D \in \mathbb{R}^3$ .

$$\int_D f(\mathbf{X})dV \approx V \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \pm V \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(X_i)\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)\right)^2}{n}} \quad (3.42)$$

Para sua utilização em problemas de confiabilidade é necessário que as  $X_n$  variáveis aleatórias tenham distribuição de probabilidade conhecida.

O problema da determinação da probabilidade de falha de um sistema ou componente estrutural pode ser colocado na forma de uma integral multidimensional definida pela equação:

$$P_f = \int_{\Omega} I_G f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (3.43)$$

onde  $I_G$  é uma função característica, tal que

$$I_G = \begin{cases} 1, G(\mathbf{X}) \leq 0 \\ 0, G(\mathbf{X}) > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Neste caso, uma estimativa da probabilidade de falha é definida por:

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(x_i) \quad (3.45)$$

e seu desvio padrão como sendo:

$$S_{P_f} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G^2(x_i)\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(x_i)\right)^2}{n}} \quad (3.46)$$

Sendo assim o Método de Monte Carlo consiste em:

1. Gerar  $n$  amostras de cada  $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;

2. Verificar a ocorrência de falha ou não para cada conjunto de amostras, através de  $I_G$ ;
3. Estimar a probabilidade de falha através de (3.45);
4. Estimar o desvio padrão através de (3.46);

Observa-se que não está definido um critério de parada para geração das amostras aleatórias. Comumente, usa-se a equação (3.46) para estimar o número de amostras necessárias para manter o desvio-padrão dentro de limites pré-estabelecidos e estimar a probabilidade de falha com precisão aceitável.

### 3.8.2. Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância (MMCI)

Na simulação de componentes estruturais é comum trabalhar com valores reduzidos de probabilidade de falha. Isto implica em um número muito grande de simulações. Segundo Nogueira (2005), para estimar uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações não deve ser inferior a  $10^{(n+2)}$  a  $10^{(n+3)}$ . Em algumas situações o número de simulações pode ser muito grande tornando o Método de Monte Carlo Simples inviável. Nestes casos, técnicas de redução de variância, como o Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e o Método de Monte Carlo por Hipercubo Latino, devem ser utilizadas.

A técnica de Amostragem por Importância tem como finalidade reduzir o número de amostras e simulações utilizadas pelo MMCS para calcular a probabilidade de falha. Segundo Harbitz (1986), a técnica citada desloca os pontos de amostragem para uma região do domínio localizada ao redor de um ponto da curva de estado - limite, como mostrado na Figura 3-11, utilizando uma nova função  $h(\mathbf{X})$  de distribuição de probabilidade. Tal ponto vem a ser o próprio ponto de projeto, determinado previamente pelo método FORM.

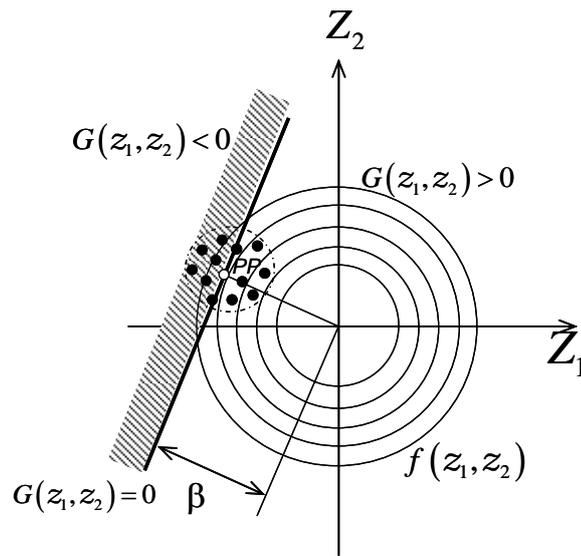


Figura 3-11: Distribuição de pontos de amostragem ao redor do ponto de projeto (PP)

A probabilidade de falha utilizando a técnica de amostragem por importância é dada pela equação (3.47), onde a função  $h(\mathbf{X})$  é uma função densidade de probabilidade escolhida de forma adequada para o problema em questão.

$$P_f = \int_{\Omega} I_G(\mathbf{X}) \frac{f(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} h(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (3.47)$$

Uma estimativa da probabilidade de falha é definida pela equação

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(x_i) \frac{f(x_i)}{h(x_i)} \quad (3.48)$$

Uma forma mais apropriada para compreender a função  $h(\mathbf{X})$  é associá-la a uma função de ponderação  $w(\mathbf{X})$  que distribua as amostras em torno dos valores para os quais  $G(\mathbf{X}) > 0$ , isto é, quando mais próximo o ponto estiver do domínio de falha maior sua contribuição, ao passo que pontos muito distantes podem ser excluídos do cômputo da estimativa de falha. A partir do exposto a equação (3.48) pode ser redefinida como:

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(x_i) w(x_i) \quad (3.49)$$

onde

$$w(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \quad (3.50)$$

O desvio-padrão da probabilidade de falha é definido pela equação

$$S_{P_f} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G^2(x_i) w^2(x_i)\right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(x_i) w(x_i)\right)^2}{n}} \quad (3.51)$$

Geralmente estas funções de ponderação são obtidas por meio de uma primeira tentativa de estimar a probabilidade de falha utilizando, por exemplo, o métodoFORM.

Sendo assim o Método de Monte Carlo de Amostragem por Importância consiste em:

1. Gerar n amostras  $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  a partir da função distribuição de probabilidade  $h(\mathbf{X})$ ;
2. Verificar a ocorrência de falha ou não para cada amostra, através de (3.44);
3. Calcular o peso de cada ponto simulado através da equação (3.50);
4. Estimar a probabilidade de falha através de (3.49);
5. Estimar o desvio padrão através de (3.51);

Da mesma forma que no Método de Monte Carlo Simples, usa-se a equação do desvio-padrão (3.51) para estimar o número de amostras necessárias para estimar a probabilidade de falha com precisão aceitável.

### 3.8.3. Método de Monte Carlo por Hipercubo Latino (MMCHL)

O método de Hipercubo latino foi introduzido por McKay et al. (1979) como técnica de redução de amostragem. A idéia geral do método de Hipercubo Latino é que amostras sejam forçadas a estar em uma região específica. Isto pode ser feito dividindo-se as curvas padronizadas normais de função densidade de probabilidade e função densidade cumulativa por um intervalo desejado, de modo que as áreas das curvas sejam iguais em cada intervalo, como mostrado na Figura 3-12.a e na Figura 3-12.b.

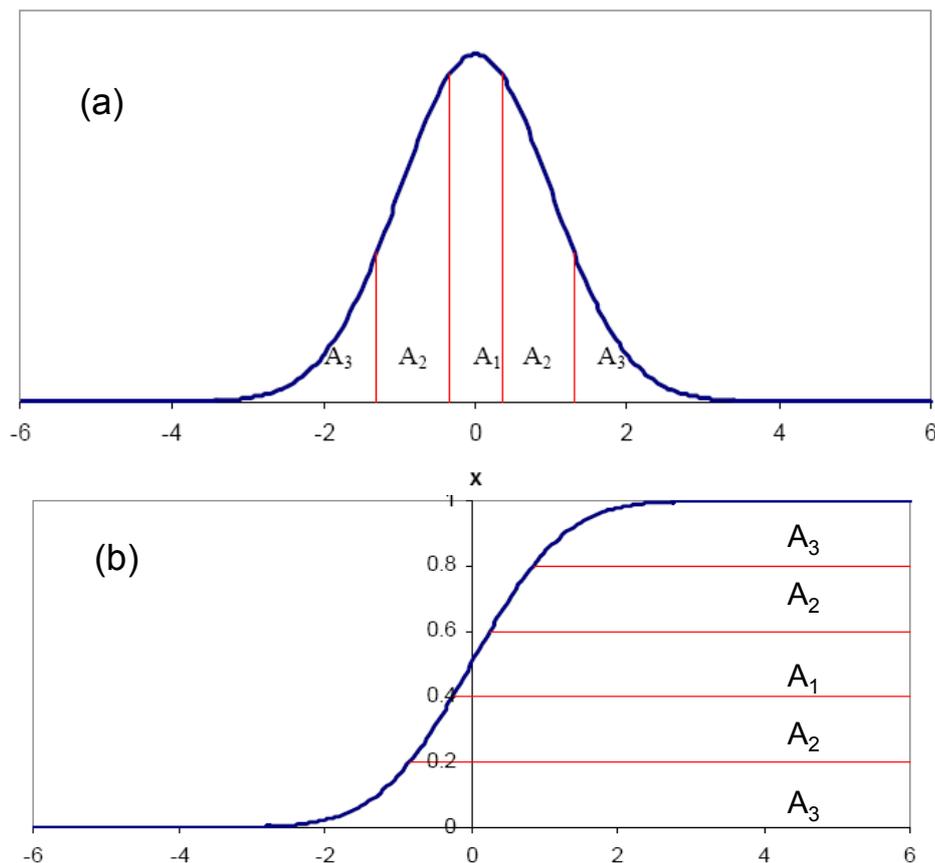


Figura 3-12: a) Função densidade de probabilidade da variável  $X$  dividida em cinco intervalos ; b) Função densidade cumulativa da variável  $X$  dividida em cinco intervalos (CHARUMAS, 2008)

Em cada intervalo, escolhe-se aleatoriamente uma amostra da curva. Ressalta-se que tais amostras não devem ter os valores de seus parâmetros repetidos entre si. Uma vez que todas as amostras forem geradas, o novo domínio das variáveis aleatórias é organizado de tal forma que cada valor dos parâmetros deverá ser usado apenas uma única vez. As amostras são então avaliadas conforme o Método de Monte Carlo Simples.

A Tabela 3-3 exemplifica o método em uma matriz 4x4 de dois fatores,  $A$  e  $B$ . A primeira amostra  $(A_1, B_1)$  é aleatoriamente escolhida. A segunda amostra  $(A_2, B_2)$  é também aleatoriamente escolhida mas desconsidera a possibilidade de ser  $(A_1, B_n)$  ou  $(A_m, B_1)$ . A terceira amostra  $(A_3, B_4)$  é também aleatoriamente escolhida mas desconsidera a possibilidade de ser  $(A_1, B_n)$  ou  $(A_m, B_1)$  ou  $(A_2, B_n)$  ou  $(A_m, B_2)$ . A quarta amostra  $(A_4, B_3)$  é também aleatoriamente escolhida mas desconsidera a possibilidade de ser  $(A_1, B_n)$  ou  $(A_m, B_1)$  ou  $(A_2, B_n)$  ou  $(A_m, B_2)$  ou  $(A_4, B_n)$  ou  $(A_m, B_4)$ . O resultado dessa construção é que cada parâmetro de projeto terá sido testada em cada um dos seus possíveis valores.

A B	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
B <sub>1</sub>	X			
B <sub>2</sub>		X		
B <sub>3</sub>				X
B <sub>4</sub>			X	

Tabela 3-3: Exemplo de Hipercubo Latino para duas variáveis aleatórias de quatro níveis cada.

O uso do Hipercubo latino é particularmente útil em experimentos com grande número de fatores e/ou níveis, mas deve ser utilizado com cuidado. Segundo Press et al. (1992), apesar de todos os valores possíveis das duas variáveis serem utilizados, caso haja uma importante interação entre parâmetros diferentes dos escolhidos, então o resultado do método de Hipercubo latino não será adequado.

No presente trabalho, as aplicações dos métodos de Monte Carlo serão feitas tanto com o auxílio do programa computacional *Encore*® 5.0. quanto com o auxílio do programa computacional *Crystal Ball*® *Fusion Edition 11*. da *Oracle Inc.* Entre os vários programas computacionais de simulação do Método de Monte Carlo existentes hoje no mercado, como o *@Risk*® e o *XLSim*®, o *Crystal Ball*® destaca-se na indústria automotiva como ferramenta de apoio na aplicação da metodologia *Six Sigma*® e gerenciamento de riscos. Além disso, é bastante utilizado em modelos de previsão, simulação e otimização de projetos. O *Crystal Ball*® é capaz de realizar as simulações de Monte Carlo por meio dos métodos Simples e Hipercubo Latino.

### 3.9. Recomendações de probabilidade de falhas de projetos

Seja qual for o método de predição de confiabilidade escolhido, um ponto muito importante é a definição do valor do índice de confiabilidade  $\beta$ , que é utilizado como critério de parada do processo, ou seja, o processo é repetido até que o índice calculado convirja para um valor pré-selecionado.

O JCSS (2001) propôs uma classificação de consequência de falhas (classes de segurança), para que fosse possível selecionar uma recomendação de probabilidade de falha do projeto e respectivo índice de confiabilidade

1. Consequências leves (Classe 1) – Risco de vida é pequeno ou negligenciável, e as consequências econômicas são pequenas ou negligenciáveis;

2. Consequências moderadas (Classe 2) – Risco de vida é médio ou as consequências econômicas são consideráveis;
3. Consequências graves (Classe 3) – Risco de vida é alto ou as consequências econômicas são significantes

A Tabela 3-4 relaciona as classes de segurança com valores recomendados para o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha, levando em conta o custo relativo da medida de segurança  $\psi$  (relação entre o custo de construção da estrutura e o capital financeiro para que a probabilidade de falha seja minimizada e esteja dentro do índice de confiabilidade exigido). Para um custo relativo  $\psi \geq 10$  deve-se ponderar se o re-projeto da estrutura não é a ação mais adequada.

Custo relativo da medida de segurança	Consequência leve de falha (Classe 1)	Consequência moderada de falha (Classe 2)	Consequência grave de falha (Classe 3)
Grande ( $5 \leq \psi < 10$ )	$\beta = 3,1 (P_F \approx 10^{-3})$	$\beta = 3,3 (P_F \approx 5 \cdot 10^{-4})$	$\beta = 3,7 (P_F \approx 10^{-4})$
Normal ( $2 \leq \psi < 5$ )	$\beta = 3,7 (P_F \approx 10^{-4})$	$\beta = 4,2 (P_F \approx 10^{-5})$	$\beta = 4,4 (P_F \approx 5 \cdot 10^{-6})$
Pequeno ( $\psi < 2$ )	$\beta = 4,2 (P_F \approx 10^{-5})$	$\beta = 4,4 (P_F \approx 5 \cdot 10^{-6})$	$\beta = 4,7 (P_F \approx 10^{-6})$

Tabela 3-4: Recomendação de índices de confiabilidade e probabilidade de falhas (JCSS, 2001)

A partir da Tabela 3-4 tem-se o valor  $\beta = 4,2 (P_F \approx 10^{-5})$  como o mais usual para situações de projetos estruturais automotivos onde o principal mecanismo de falha não põe em risco demasiado a segurança dos usuários do veículo. Este é o caso do *top mount*, por exemplo, que será utilizado durante o estudo de caso prático. A deformação plástica (consequência da falha por escoamento) sofrida pelo componente inviabilizará a correta fixação do elemento de suspensão, mas não comprometerá em demasia a utilização da suspensão. Para evitar o risco, os usuários do veículo podem simplesmente pará-lo e efetuar o reparo apropriado. Pode-se então considerar a consequência da falha como moderada. Já o custo da medida de segurança (reparo) pode ser considerado como normal, visto que não necessitará mobilização de recursos maiores que mão de obra e peça sobressalente.

### 3.10. Confiabilidade de sistemas

Confiabilidade de sistemas é a confiabilidade de um sistema estrutural composto de um número de componentes ou a confiabilidade de um único componente que tem vários mecanismos de falha com aproximadamente a mesma importância. Os sistemas são classificados em Sistemas em série e Sistemas em paralelo.

#### 3.10.1. Confiabilidade de Sistemas em série

Os componentes de um sistema em série são disponibilizados em sequência, conforme a Figura 3-13. Nesta disposição, a falha de qualquer componente provoca a falha total do sistema.

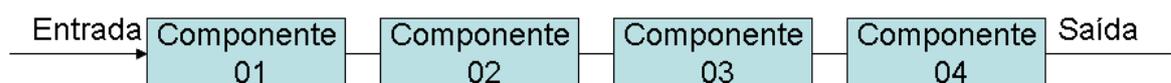


Figura 3-13: Sistema em série com 4 componentes

A confiabilidade de um sistema em série  $R_{SS}$  com  $n$  componentes é expressa por

$$R_{SS} = \prod_{i=1}^n R_i \quad (3.52)$$

Verifica-se que, como a confiabilidade de qualquer componente varia entre zero e um, o aumento do número de componentes do sistema diminui sua confiabilidade geral. Dessa forma, a simplicidade na utilização de componente em série é fundamental para que um sistema possua alta confiabilidade.

#### 3.10.2. Confiabilidade de Sistemas em paralelo

Os componentes de um sistema em paralelo são disponibilizados lado - a - lado, conforme a Figura 3-14. Nesta disposição, todos os componentes operam simultaneamente e independentemente, sendo necessária a falha de todos os componentes para ocorrer a falha total do sistema.

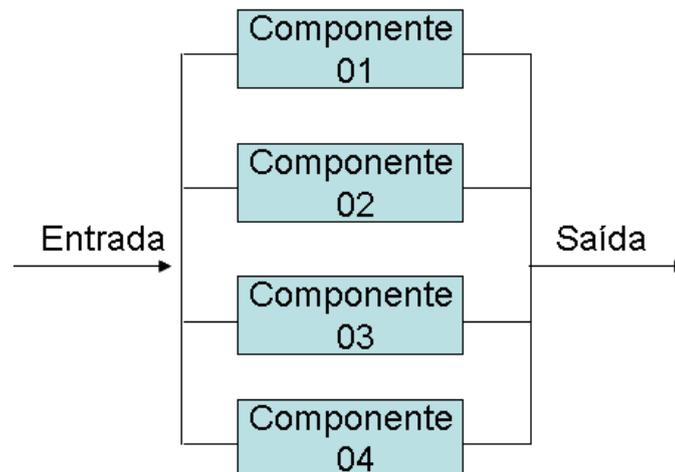


Figura 3-14: Sistema em paralelo com 4 componentes

A confiabilidade de um sistema em paralelo  $R_{SP}$  com  $n$  componentes é expressa por

$$R_{SP} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (3.53)$$

### 3.10.3. Métodos de resolução de confiabilidade de sistemas por redução

O método mais utilizado para se calcular a confiabilidade geral de um sistema é o método por redução. Neste método, substituem-se sequencialmente os componentes em série e em paralelo por componentes de confiabilidade equivalente, até que reste um único componente, que representará a confiabilidade geral do sistema.

A Figura 3-15 mostra passo-a-passo a utilização do método para determinar a confiabilidade de um sistema de seis componentes.

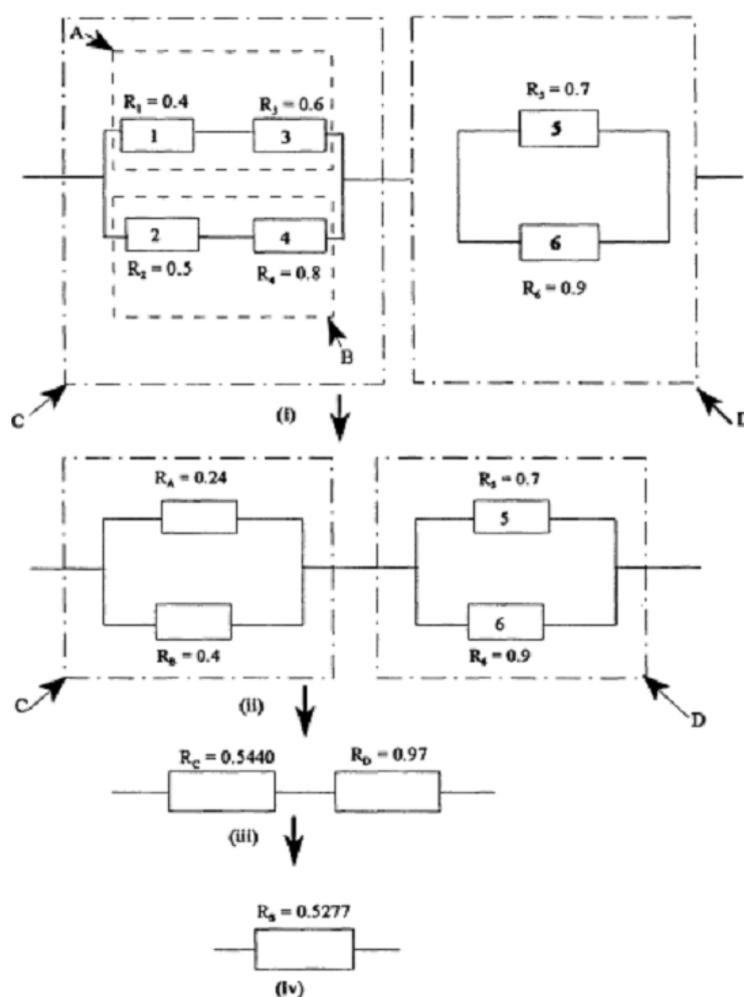


Figura 3-15: Redução passo-a-passo para determinação da confiabilidade de um sistema de 6 componentes: (i) Sistema original. (ii) Sistema reduzido para 4 componentes. (iii) Sistema reduzido para 2 componentes. (iv) Sistema reduzido para um componente (DHILLON, 1999)

### 3.11. Modelagem matemática de componentes estruturais

Durante o dimensionamento mecânico de uma estrutura qualquer se deve garantir que a estrutura analisada não venha a falhar sob condições pré-determinadas de operação. No caso de um componente estrutural automotivo, uma das condições de operação mais recorrentes é o fato de que o componente deve sempre trabalhar em sua zona elástica, ou seja, deve ser solicitado por uma tensão menor que o limite de escoamento de seu material. Ultrapassado tal limite, o componente atinge a zona plástica, onde se deforma e perde sua função de utilização. Um pouco mais além, atingindo a zona plástica, o componente pode ainda atingir seu limite de ruptura, o

que provocaria sua ruptura e falha total. A Figura 3-16 mostra um gráfico de tensão-deformação para um aço comum que ilustra as zonas elástica e plástica, além dos limites de escoamento e de ruptura.

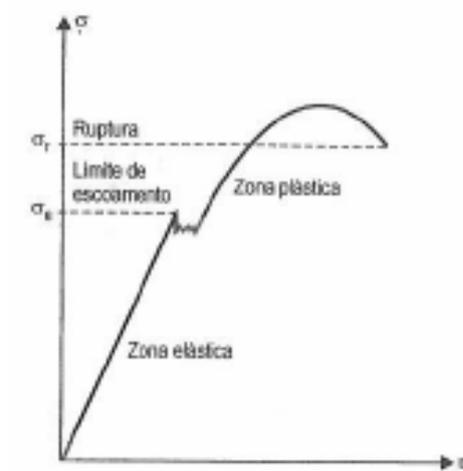


Figura 3-16: Gráfico tensão-deformação para aço comum (FIALHO, 2008)

Para garantir o dimensionamento de uma estrutura dentro de sua zona elástica, emprega-se o conceito de Fator de Segurança.

As ferramentas utilizadas na área do cálculo estrutural são oriundas da Resistência dos Materiais, que trata da resistência e rigidez de estruturas baseada nos teoremas da mecânica geral e em particular no estudo da estática. Devido a dificuldade de utilização de tais teoremas em estruturas complexas e/ou providas de descontinuidades, tem sido largamente utilizado o Método de Elementos Finitos (MEF) no tratamento de problemas estruturais.

### 3.11.1. Fator de segurança

Conforme Shigley (1981), o fator de segurança de um componente estrutural construído em material dúctil, como o aço, pode ser determinado por meio de três teorias diferentes: Teoria da tensão normal, Teoria da tensão cisalhante e Teoria da energia de distorção. Na prática, todas as três seguem o mesmo conceito de tensão máxima admissível, onde o fator de segurança FS é definido por meio de uma relação entre uma tensão máxima admissível proporcional ao limite de escoamento  $Y_S$ , e uma tensão máxima aplicada, calculada por meio da Resistência dos Materiais.

$$FS = \frac{Tensão_{adm}}{Tensão_{aplicada}} \therefore \begin{cases} Tensão_{adm} = YS \text{ (Teoria da tensão normal máxima)} \\ Tensão_{adm} = \frac{YS}{2} \text{ (Teoria cisalhante máxima)} \\ Tensão_{adm} = YS \text{ (Teoria da energia de distorção)} \end{cases} \quad (3.54)$$

Ressalta-se que na teoria da tensão normal máxima, a tensão aplicada é a máxima tensão normal calculada por meio de um círculo de Mohr, enquanto que na teoria da energia de distorção, aplica-se a tensão resultante de Von - Misses. Já na teoria cisalhante máxima, a tensão aplicada é a máxima tensão cisalhante, também calculada por meio de um círculo de Mohr.

O Círculo de Mohr (Figura 3-17) é uma representação gráfica simples desenvolvida por Christian Otto Mohr que permite a representação do estado de tensões num ponto.

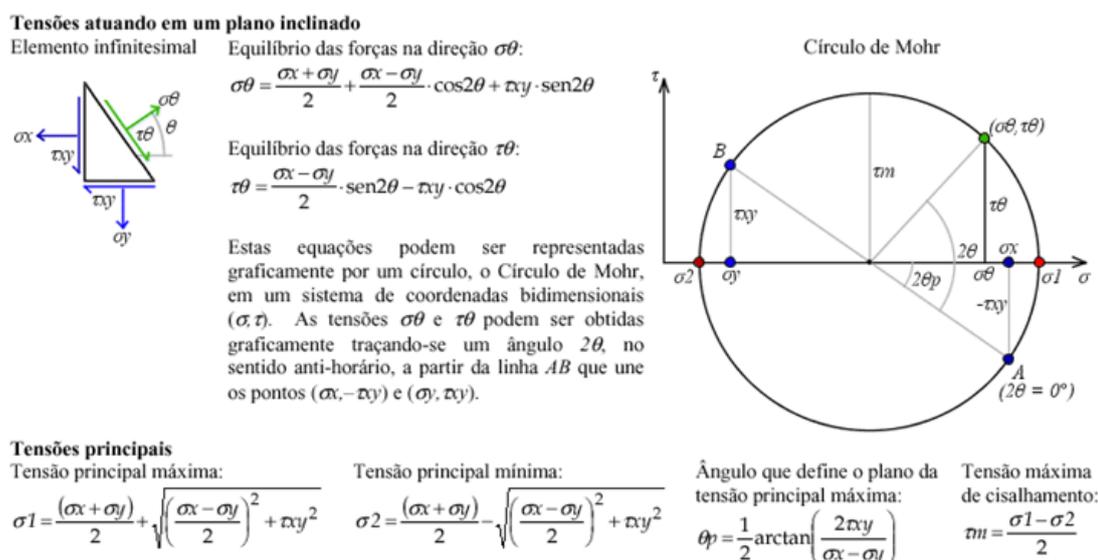


Figura 3-17: Círculo de Mohr e formulário (disponível em <https://web.tecgraf.puc-rio.br/etools/mohr>. Acessado em 27 de novembro de 2010)

Para uma situação de estado plano de tensões, ou seja, em certo ponto da superfície de um corpo carregado são conhecidas as tensões em dois planos perpendiculares, a tensão de Von - Misses VM está relacionada com o círculo de Mohr por meio da equação

$$VM = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (3.55)$$

onde as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são calculadas pela equação

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.56)$$

sendo  $\sigma_x$  a tensão normal aplicada na direção  $\bar{x}$ ,  $\sigma_y$  a tensão normal aplicada na direção  $\bar{y}$  e  $\tau_{xy}$  a tensão cisalhante aplicada no plano  $xy$ .

Ainda segundo Shigley (1984), a teoria da energia de distorção, por prever o cisalhamento com maior precisão, é a mais recomendada para dimensionamento de peças que serão colocadas no mercado sem passar por testes experimentais pós-produção.

Um problema ainda alvo de muitas discussões é o processo de definição do mínimo fator de segurança aceitável. Existem diversas normas e orientações técnicas em relação a este assunto, sem que, contudo haja uma aceitação universal. Durante o experimento numérico deste trabalho será utilizada a mesma definição do fator de segurança utilizado pelo programa computacional COSMOS© e apresentado por Fialho (2008).

Segundo Fialho (2008), o fator de segurança podia ser considerado como o produto de quatro fatores de majoração, definidos como A, B, C e D.

$$FS = A \times B \times C \times D \quad (3.57)$$

Os valores possíveis para tais fatores estão definidos na Tabela 3-5.

A – Fator de relação mínima entre Limite de ruptura e Limite elástico	A = 1 para aço carbono
	A = 1,5 para aço NiCr forjado/temperado
	A = 2 para materiais comuns
B – Fator de aplicação das cargas envolvidas	B = 1 para carregamento contínuo
	B = 2 para carregamento intermitente
	B = 3 para carregamento alternado
C – Fator de velocidade de aplicação das cargas envolvidas	C = 1 para carregamento lento e gradual
	C = 2 para carga repentina (choque)
D – Fator de tipo de material utilizado	D = 1 para materiais comuns
	D = 1,5 para aço
	D = 2 para ferro fundido

Tabela 3-5: Fatores para composição do fator de segurança (FIALHO, 2008)

O fator A está relacionado a variação do processo de produção da matéria-prima. Em problemas de estática, utiliza-se o mínimo limite de escoamento como máxima tensão admissível. Se tal limite variar para um valor maior, então estará a favor da segurança. Quanto ao limite de ruptura, espera-se que não varie a um valor menor

que o mínimo limite de escoamento teórico. Como em um problema de confiabilidade estrutural tanto o limite de escoamento como o limite de ruptura são tratados como variáveis aleatórias, não se faz necessário a majoração do fator A para um valor maior que um.

O fator B está relacionado a variação de intensidade, sentido e direção das cargas. Se as cargas não variam de intensidade, sentido ou direção, então são considerados como contínuas. Se as cargas variam de intensidade e/ou sentido, mas não de direção, então são consideradas como intermitentes. Se as cargas variam de intensidade e/ou sentido e/ou direção, então são consideradas como alternadas.

Como em um problema de confiabilidade estrutural as cargas são tratadas como variáveis aleatórias, não se faz necessário a majoração do fator B para um valor maior que um.

O fator C está relacionado a forma com que as cargas são aplicadas. Seu valor é quase sempre tomado como sendo igual a um, excetuando-se em caso de choques e/ou colisões de alta velocidade ou alta intensidade ou ainda equipamentos rotativos de alta frequência, que não se deseja a falha após a aplicação da carga.

O fator D está relacionado a variação da utilização do material, ou seja, a utilização do produto final em funções diferentes para o qual foi projetado. Como, no caso de um componente estrutural, tal componente não será utilizado em função diferente para o qual foi projetado, não se faz necessário a majoração do fator D para um valor maior que um.

Para um problema de dimensionamento determinístico de um componente estrutural, por exemplo, utilizando aço carbono HSLA-350 com relação entre mínimo limite de ruptura e mínimo limite elástico igual a 1,33, aplicação intermitente das cargas envolvidas (ou seja, as cargas variam de intensidade e/ou sentido, mas não de direção), baixa velocidade de aplicação das cargas envolvidas (típico de problemas de estática) e que é aplicado em uma única e exclusiva função, o mínimo fator de segurança aplicável seria

$$FS = 1,33 \times 2 \times 1 \times 1,5 \cong 4$$

Para o mesmo problema de dimensionamento, utilizando a abordagem da interferência carregamento-capacidade, os fatores não precisam ser majorados, já que as todas as variáveis envolvidas são tratadas como aleatórias e possuem funções de densidade de probabilidade conhecidas. Logo, o mínimo fator de segurança aplicável seria

$$FS = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Da mesma forma, para o problema de confiabilidade estrutural automotiva que será apresentado no experimento numérico, será utilizado um fator de segurança igual a um.

### 3.11.2. Método de Elementos Finitos

A limitação da abordagem analítica da maioria dos problemas de engenharia incentivou o surgimento de inúmeras pesquisas utilizando métodos numéricos. Dentre estes métodos destacam-se o MDF (método de diferenças finitas), MEF (método de elementos finitos), MEC (método de elementos de contorno) e mais recentemente os métodos numéricos não convencionais como os métodos sem malha.

O MEF é hoje o método numérico mais difundido no meio técnico / científico, graças a sua robustez na abordagem de uma ampla variedade de problemas da física-matemática e de engenharia de forma geral.

O MEF foi apresentado pela primeira vez por Clough (1960), na análise de problemas de elasticidade plana. Contudo, suas bases surgiram bem antes.

Hennikoff (1941) apresentou o *Framework Method*, onde discretizou o problema elástico de sólidos planos com um conjunto finito de elementos de barras e vigas.

Courant (1943) aproximou a função de distorção do problema de torção de Saint Venant por meio de subdomínios triangulares lineares, solucionando as equações integrais relativas ao problema por meio do princípio de energia mínima. A proposta de Courant, embora não tenha sido denominada ainda como MEF, apresentava todos os conceitos básicos do MEF convencional.

Argyris (1954) descreveu a abordagem de estruturas de geometria complexa com resposta elástica linear, utilizando uma sistemática para a solução discretizada facilmente adaptada a computadores digitais.

Turner et al. (1956) apresentou o método direto da rigidez, utilizando as equações da elasticidade clássica para obter as propriedades de elementos triangulares na aproximação de problemas de elasticidade plana.

Desde então, vários outros autores tem contribuído para o desenvolvimento do MEF, destacando-se S. Ahmad, B.M. Irons, I. Babuska, J.T. Oden, e O. C. Zienkiewicz.

O MEF é um método aproximado de resolução de problemas de base geométrica. Enquanto que nos métodos analíticos clássicos a estrutura analisada é considerada contínua, permitindo o cálculo de respostas exatas de deslocamentos, deformações e tensões, no método dos elementos finitos a estrutura analisada é discretizada como uma montagem de elementos de comprimento finito e não diferencial. Os pontos de conexão são chamados de nós do modelo. Em tal estrutura discretizada, são calculados os deslocamentos dos nós do modelo (deslocamentos nodais) e posteriormente os esforços internos (tensão e deformação). O modo pelo qual a estrutura se comporta entre os nós do modelo dependerá das propriedades atribuídas ao elemento escolhido. Os programas computacionais de elementos finitos oferecem uma biblioteca de elementos, cada qual tentando representar um diferente comportamento físico conhecido da mecânica estrutural (estado plano de tensões, placas, cascas, membranas, sólidos).

Embora o MEF tenha sido inicialmente associado a aplicações estruturais, ele também tem sido bastante utilizado em problemas de transferência de calor, dinâmica de fluidos, eletromagnetismo, etc.

O método dos elementos finitos tem como ponto de partida a relação entre forças nodais e deslocamentos individuais para cada elemento individual. Essa idéia fundamental está relacionada ao conceito de rigidez. O conceito mais simples de rigidez é a constante elástica  $K$  de uma mola, que relaciona linearmente a força aplicada e o deslocamento da mola (Figura 3-18).

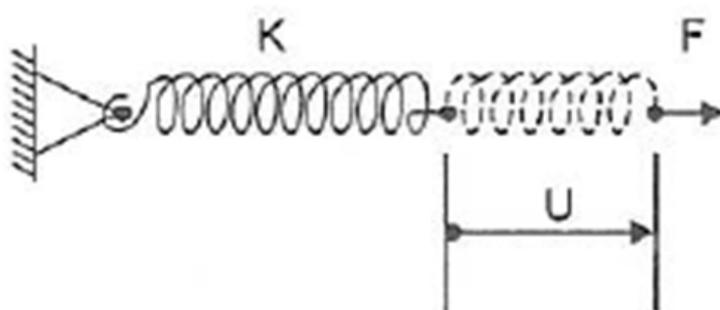


Figura 3-18: Representação de uma mola de constante elástica  $K$  deslocada de  $U$  quando sob a ação de uma força  $F$  (ALVES FILHO, 2007)

Em uma mola está presente apenas o conceito de rigidez axial. Já em uma viga, podem surgir diversos componentes de rigidez, como rigidez axial, rigidez a flexão, rigidez a torção, rigidez ao cisalhamento. Dessa forma, os diversos componentes de um elemento estão relacionados aos diversos componentes de força e deslocamento nodais presentes. Daí decorre os conceitos de matriz de rigidez  $[K]$ , matriz de cargas nodais  $\{F\}$  e matriz dos deslocamentos nodais  $[U]$ .

$$\{F\} = [K] \cdot [U] \quad (3.58)$$

A Figura 3-19 exemplifica que uma matriz de rigidez de uma estrutura constituída de apenas um elemento (neste caso o elemento mola com nó fixo, que possui apenas um deslocamento) terá apenas um termo. Já a matriz de rigidez de uma estrutura constituída de vários elementos, conseqüentemente vários deslocamentos, terá vários termos.

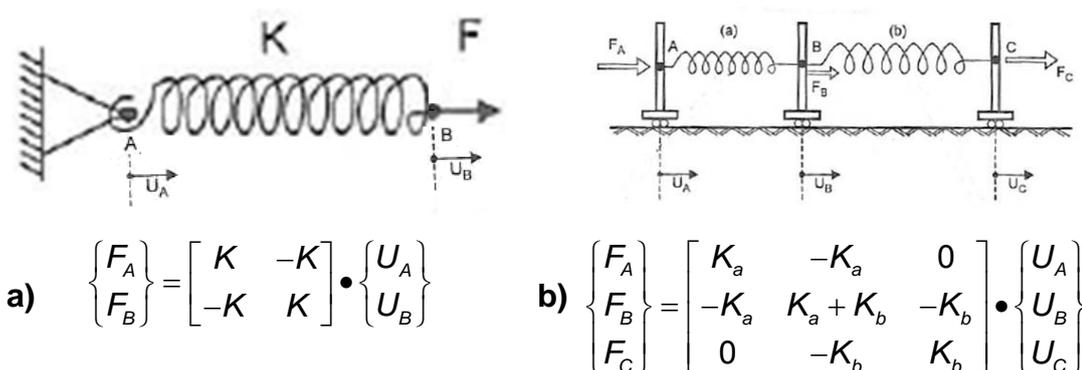


Figura 3-19: a) Matriz de rigidez de uma estrutura constituída de apenas um elemento mola. b) Matriz de rigidez de uma estrutura constituída de vários elementos. (ALVES FILHO, 2007)

Um fator importante para a obtenção de uma matriz de rigidez pequena (e simplificação da resolução do problema em MEF) é o número de nós. Tal variável depende do elemento escolhido e de seu tamanho. O tamanho de um elemento é determinado pelo diâmetro de uma circunferência que circunscreva o elemento (ou esfera no caso de um elemento tridimensional), como representado na Figura 3-20.

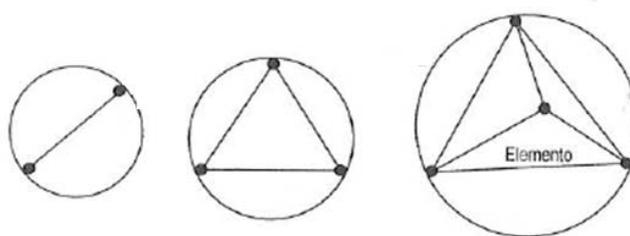


Figura 3-20: Circunferências ou esfera definem o tamanho de um elemento finito (FIALHO, 2008)

A Figura 3-21 exemplifica uma biblioteca com diversos elementos finitos de diversas ordens e graus de liberdade (GL). A escolha de um determinado elemento deve ser baseada no comportamento físico e propriedades atribuídas a cada elemento finito e na compatibilidade geométrica do elemento com o próprio modelo.

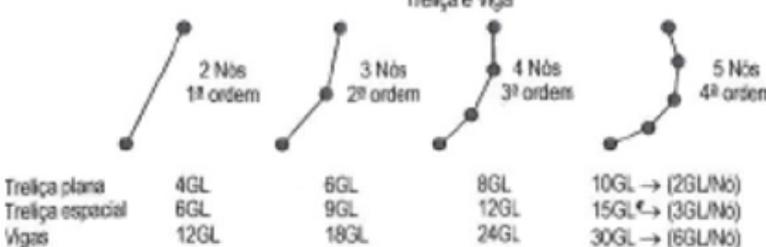
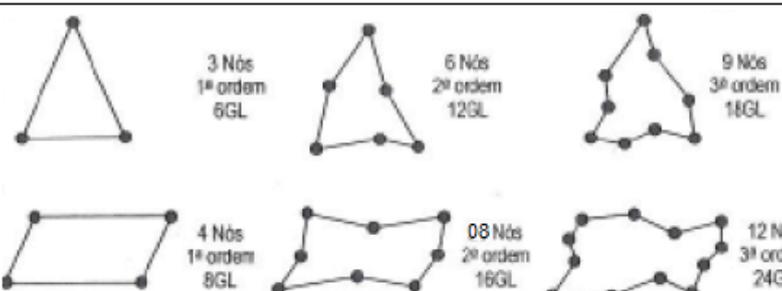
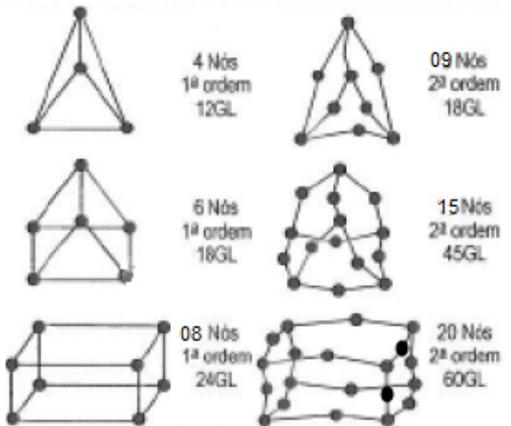
Elementos unidimensionais 1-D		Aplicação												
<p style="text-align: center;">Trelça e Viga</p>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%;">Trelça plana</td> <td style="width: 25%;">4GL</td> <td style="width: 25%;">8GL</td> <td style="width: 25%;">10GL → (2GL/nó)</td> </tr> <tr> <td>Trelça espacial</td> <td>6GL</td> <td>12GL</td> <td>15GL → (3GL/nó)</td> </tr> <tr> <td>Vigas</td> <td>12GL</td> <td>24GL</td> <td>30GL → (6GL/nó)</td> </tr> </table>		Trelça plana	4GL	8GL	10GL → (2GL/nó)	Trelça espacial	6GL	12GL	15GL → (3GL/nó)	Vigas	12GL	24GL	30GL → (6GL/nó)	Análise de estruturas de treliças com perfis de seção constante e análise de pórticos
Trelça plana	4GL	8GL	10GL → (2GL/nó)											
Trelça espacial	6GL	12GL	15GL → (3GL/nó)											
Vigas	12GL	24GL	30GL → (6GL/nó)											
Elementos bidimensionais 2-D		Aplicação												
		Análise de estruturas formas por chapas, superfícies de espessura muitas vezes menor que as demais dimensões.												
Elementos tridimensionais 3-D		Aplicação												
		Componentes orgânicos de máquinas, tais como eixos, volantes, bloco de motor, suportes, peças fundidas, forjadas, etc..												

Figura 3-21: Biblioteca de elementos finitos (baseado em FIALHO, 2008)

No experimento numérico desta dissertação, serão utilizados elementos triangulares parabólicos de estado plano de tensões. Devido a versatilidade de sua geometria, qualquer corpo contínuo bidimensional pode ser representado como um conjunto de triângulos, como o exemplo da Figura 3-22.

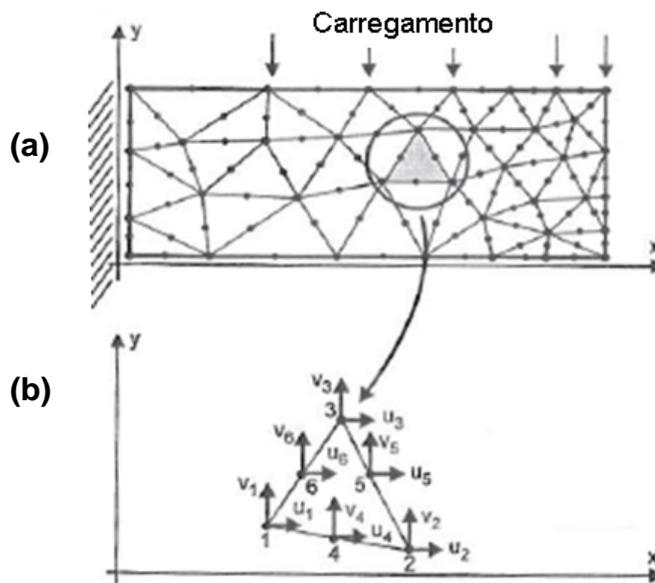


Figura 3-22: a) Discretização de uma viga com elemento triangular parabólico de estado plano de tensões; b) Diagrama de Vetores de deslocamento nodais; (ALVES FILHO, 2007)

O elemento triangular parabólico finito de estado plano de tensões tem seis nós, doze graus de liberdade e uma matriz de rigidez de dimensão 12x12. Assim,

$$\{F\}_{12 \times 1} = [K]_{12 \times 12} \cdot [U]_{12 \times 1} \quad (3.59)$$

O elemento triangular parabólico possui seus deslocamentos nodais  $u$  e  $v$  variando conforme uma função de segundo grau, baseada nas direções  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy + c_5 x^2 + c_6 y^2 \\ v(x, y) &= c_7 + c_8 x + c_9 y + c_{10} xy + c_{11} x^2 + c_{12} y^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Dessa forma, as deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  (derivadas parciais do deslocamento) variam linearmente.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 + c_4 y + 2c_5 x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = c_9 + c_{10} x + 2c_{12} y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_3 + c_4 x + 2c_6 y + c_8 + c_{10} y + 2c_{11} x \end{aligned} \quad (3.61)$$

Da mesma forma (linear) variam as tensões (proporcionais as deformações) atuantes  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  seu coeficiente de Poisson<sup>7</sup>.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} \{c_2 + c_4y + 2c_5x + \nu(c_9 + c_{10}x + 2c_{12}y)\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} \{\nu(c_2 + c_4y + 2c_5x) + c_9 + c_{10}x + 2c_{12}y\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \gamma_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2}\right) (c_3 + c_4x + 2c_6y + c_8 + c_{10}y + 2c_{11}x) \end{aligned} \quad (3.63)$$

A resolução de tais equações constitutivas por meio do método dos elementos finitos gera erros cujas causas mais comuns são:

- Aproximação da geometria utilizada;
- Capacidade de processamento da máquina utilizada para execução da análise;
- Combinação do grau das funções de forma utilizadas e da malha;

As duas primeiras causas são relativamente fáceis de contornar, investindo em máquinas mais potentes e/ou supressão de pequenos raios, por exemplo. Já em relação ao erro devido ao grau das funções de forma utilizadas e da malha, dois procedimentos de testes de convergência de erro podem ser utilizados: h-adaptativo e p-adaptativo.

O método h-adaptativo consiste em reduzir o tamanho dos elementos nas zonas mais críticas de tensão. No entanto, em zonas de descontinuidade, a concentração de tensões pode divergir para o infinito a medida que elementos de malha menores são usados.

O método p-adaptativo consiste em incrementar o grau as funções de forma, utilizando elementos de maior ordem, porem mantendo invariável o tamanho do elemento da malha.

---

<sup>7</sup> As definições do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson podem ser verificadas em (SHIGLEY, 1981) e não serão abordadas neste trabalho.

Os métodos h-adaptativo e p-adaptativo envolvem soluções iterativas que param quando a exigência da precisão é alcançada ou quando o número máximo de iterações é alcançado. No entanto tais iterações geram maior tempo de processamento até a obtenção da resposta. Por isso não é incomum apenas a utilização do chamado método de solução padrão, ou seja, utilizando elementos de máxima ordem possível e tamanho adequado conforme experiência prática. O método de solução padrão conduz a resultados com razoável exatidão, dentro de um tempo relativamente curto, oferecendo na maioria das aplicações de engenharia, melhor combinação de exatidão e eficiência computacional.

Durante a experimentação numérica deste trabalho será utilizado o programa computacional *Cosmos*® para gerar o modelo discretizado pelo Método de Elementos Finitos (MEF) do componente estrutural analisado e executar as simulações numéricas do experimento.

Existem hoje no mercado diversos programas computacionais, como *Cosmos*®, *Nastran*®, *Ansys*®, *Abaqus*®, entre outros, para a realização de simulações de MEF. Na indústria automotiva, destaca-se o uso do *Nastran*®, que possui biblioteca com grande número de elementos, cada qual capacitado para descrever um determinado comportamento físico. No entanto, o *Nastran*® requer a utilização de computadores de grande porte. Já o *Cosmos*® possui uma biblioteca de elementos muito pequena (apenas cinco elementos), mas é de fácil utilização e possui excelente desempenho em micro-computadores. Por isso será utilizado neste trabalho.

### 3.12. Exemplo de aplicação dos métodos

O objetivo específico desta sessão é avaliar como a abordagem das diferentes técnicas de predição de confiabilidade, em uma situação de interferência carregamento-capacidade, pode influenciar no dimensionamento de componentes estruturais automotivos. Para isso será utilizado um modelo de viga metálica bi-apoiada (Figura 3-23), que ocorre muito frequentemente em aplicações veiculares, como em longarinas e reforços transversais. Determinar-se-á a sua espessura, para

uma confiabilidade estrutural desejável de 99,999%, por meio dos métodos determinístico, FOSM, FORM e Monte Carlo simples.

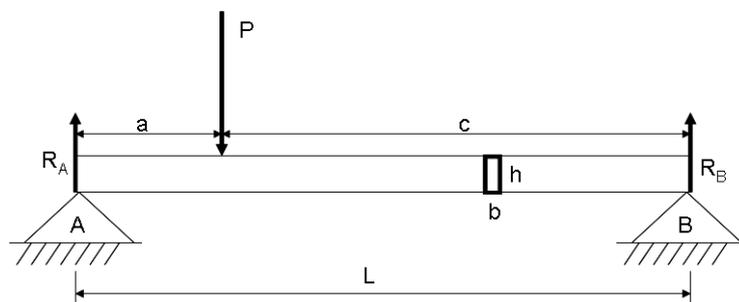


Figura 3-23: Viga bi-apoiada com uma carga concentrada P

Como hipóteses iniciais têm-se o seguinte:

1. A viga possui comprimento  $L$  e seção transversal  $b \times h$ , sendo  $h$  equivalente a duas vezes a medida de  $b$ ;
2. A viga está submetida a uma carga concentrada  $P$ , localizada a uma distância  $a$  de um dos apoios;
3. O material da viga é o Arcelor-Mittal© DP-980HY;
4. Os valores médios e desvios padrões conhecidos para cada variável aleatória do problema estão descritos na Tabela 3-6.

VA (unidade)	Média (unidade)	Desvio-Padrão (unidade)
$a$ (m)	2,0m	0,02m
$b$ (m)	?	COV = 0,2 (adim.)
$L$ (m)	6,0m	0,02m
$P$ (N)	40,000N	400N
$Y_S$ (MPa)	800MPa	8,0MPa
$Y_R$ (MPa)	1040MPa	10,4MPa

Tabela 3-6: Dados referentes a variáveis aleatórias

### 3.12.1. Abordagem I – Método determinístico

No método determinístico as variáveis são tratadas como não-aleatórias, e o dimensionamento é feito utilizando-se dos valores médios de cada variável e de um fator de segurança diferente de um.

Para determinar o fator de segurança mais adequado para a estrutura, algumas hipóteses extras devem ser verificadas:

- O material utilizado é um aço estrutural com limite de escoamento  $YS = 800,00MPa$  e limite de ruptura  $YR = 1040,00MPa$ , tal que  $A = 1,33$ ;
- As cargas são aplicadas de forma contínua, tal que  $B = 1$ ;
- O carregamento é aplicado de forma lenta e gradual, tal que  $C = 1$ ;
- O material utilizado é aço, tal que  $D = 1,5$ ;

Usando a equação (3.57) para calcular o fator de segurança, temos

$$FS = AxBxCxD = 1,33 \times 1 \times 1 \times 1,5 \cong 2,0 \quad (3.64)$$

O fator de segurança é também definido pela equação (3.54), como abaixo

$$FS = \frac{YS}{Q_{\min}} \quad (3.65)$$

Igualando-se as equações (3.65) e (3.64), se pode calcular o limite mínimo de resistência

$$\frac{YS}{Q_{\min}} = 2 \Rightarrow Q_{\min} = \frac{800MPa}{2} = 400MPa \quad (3.66)$$

Sendo a máxima tensão solicitante calculada pela equação de flexão  $S_{\max}$ , onde  $M_{\max}$  é a máxima carga de flexão aplicada e  $I_x$  representa o momento de inércia da seção transversal.

$$S_{\max} = \frac{M_{\max}b}{I_x} = \frac{M_{\max}b}{\frac{b(2b)^3}{12}} \quad (3.67)$$

Igualando-se as equações (3.66) e (3.67), se pode calcular o mínimo valor de b

$$400MPa = \frac{M_{\max}b}{\frac{b(2b)^3}{12}} = \frac{80.000Nm \cdot b}{\frac{8b^4}{12}} \quad (3.68)$$

O mínimo valor calculado para b é

$$b = 0,06694m = 66,94mm \quad (3.69)$$

No método determinístico a confiabilidade não é levada em consideração.

### 3.12.2. Abordagem II – Método FOSM

No método FOSM as variáveis são tratadas como aleatórias e normalmente distribuídas.

A partir da hipótese de que as variáveis são normalmente distribuídas, pode-se usar a equação (3.29) para determinar o índice de confiabilidade

$$\Phi^{-1}(99,999\%) = -4,265 = -\beta \Leftrightarrow \beta = 4,265 \quad (3.70)$$

A capacidade  $\bar{Q}$  é determinada por meio da equação (3.54) do fator de segurança

$$FS = \frac{YS}{\bar{Q}} = 2 \Leftrightarrow \bar{Q} = \frac{YS}{2} = 400 \text{MPa} \quad (3.71)$$

A variância de  $\bar{Q}$  é determinada pela equação (3.26)

$$S_{\bar{Q}}^2 = \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial YS} \right)^2 S_{YS}^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 (8 \cdot 10^6)^2 = (4 \cdot 10^6)^2 \quad (3.72)$$

O carregamento  $\bar{S}$  é calculado pela resolução da equação de tensão máxima de flexão (3.67).

$$\bar{S} = \frac{Mb}{I_x} = \frac{a \left( \frac{Pc}{a+c} \right) b}{\frac{b(2b)^3}{12}} = \frac{(3Pac)b}{2(a+c)b^4} = \frac{3Pa(L-a)}{2Lb^3} \quad (3.73)$$

De onde se determina que

$$\bar{S} = \frac{3(40.000)(2,0)(6,0 - 2,0)}{2(6,0)b^3} = \frac{80.000}{b^3} \quad (3.74)$$

A variância de  $\bar{S}$  é determinada pela equação (3.26)

$$S_{\bar{S}}^2 = S_{S_{\max}}^2 = \left( \frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial P} \right)^2 S_P^2 + \left( \frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial a} \right)^2 S_a^2 + \left( \frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial L} \right)^2 S_L^2 + \left( \frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial b} \right)^2 S_b^2 \quad (3.75)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial P} = \frac{3a(\bar{L} - \bar{a})}{2L\bar{b}^3} = \frac{3(2,0)(6,0 - 2,0)}{2(6,0)\bar{b}^3} = \frac{2}{\bar{b}^3} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial a} = \frac{3\bar{P}(\bar{L} - 2\bar{a})}{2L\bar{b}^3} = \frac{3(40.000)(6,0 - 2 \cdot 2,0)}{2(6,0)\bar{b}^3} = \frac{20.000}{\bar{b}^3} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial L} = \frac{3\bar{P}\bar{a}^2}{2\bar{L}^2\bar{b}^3} = \frac{3(40.000)(2,0)^2}{2(6,0)^2\bar{b}^3} = \frac{20.000}{3\bar{b}^3} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{\max}}{\partial b} = \frac{-9\bar{P}\bar{a}(\bar{L} - \bar{a})}{2L\bar{b}^4} = \frac{-9(40.000)(2,0)(6,0 - 2,0)}{2(6,0)\bar{b}^4} = \frac{-240.000}{\bar{b}^4} \quad (3.79)$$

O desvio padrão de b é determinado pela definição de coeficiente de variação

$$COV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \quad (3.80)$$

logo,

$$COV_b = \frac{S_b}{\bar{b}} = 0,02 \Leftrightarrow S_b = 0,02 \cdot \bar{b} \quad (3.81)$$

Retornando a equação (3.75), determina-se a variância de  $\bar{S}$

$$S_S^2 = \left(\frac{2}{\bar{b}^3}\right)^2 (400)^2 + \left(\frac{20.000}{\bar{b}^3}\right)^2 (0,02)^2 + \left(\frac{20.000}{3\bar{b}^3}\right)^2 (0,02)^2 + \left(\frac{-240.000}{\bar{b}^4}\right)^2 (0,02 \cdot \bar{b})^2 \quad (3.82)$$

$$S_S^2 = \frac{64 \cdot 10^4}{b^6} + \frac{16 \cdot 10^4}{b^6} + \frac{16 \cdot 10^4}{9b^6} + \frac{2304 \cdot 10^4}{b^6} \quad (3.83)$$

Usando a equação (3.27), calcula-se enfim o valor de b

$$\beta = \frac{\bar{Q} - \bar{S}}{\sqrt{S_Q^2 + S_S^2}} \Leftrightarrow 4,265 = \frac{400 \cdot 10^6 - \frac{80.000}{b^3}}{\sqrt{\left(4 \cdot 10^6\right)^2 + \left(\frac{64 \cdot 10^4}{b^6} + \frac{16 \cdot 10^4}{b^6} + \frac{16 \cdot 10^4}{9b^6} + \frac{2304 \cdot 10^4}{b^6}\right)^2}} \quad (3.84)$$

A equação (3.84) pode ser calculada analiticamente, porém, usando a ferramenta solver do programa computacional MS-Excel®, pode-se rapidamente determinar o valor de b como sendo

$$b = 0,06326259m = 63,26mm \quad (3.85)$$

### 3.12.3. Abordagem III – Método FORM

No método FORM as variáveis são consideradas como aleatórias e normalmente distribuídas.

A capacidade  $Q$  é determinada por meio do conceito de fator de segurança

$$Q = \frac{YS}{2} \quad (3.86)$$

O carregamento  $S$  é calculado pelo conceito de tensão de flexão

$$S = \frac{3Pa(L-a)}{2Lb^3} \quad (3.87)$$

O estado – limite é determinado pela equação

$$G = Q - S \quad (3.88)$$

e a condição de falha será

$$G < 0 \quad (3.89)$$

Na condição  $G = 0$ , determina-se o ponto de projeto. Nesta condição, é possível determinar uma equação geral para  $b$ , a partir de (3.88)

$$G = Q - S = \frac{YS}{2} - \frac{3Pa(L-a)}{2Lb^3} = 0 \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{3Pa(L-a)}{L \cdot YS}} \quad (3.90)$$

Para calcular o mínimo valor de  $b$  que evite a falha da estrutura, por meio do método FORM, foi utilizado o programa computacional *Encore*© 5.0.

A Figura 3-24 e a Figura 3-25 mostram os quadros de variáveis aleatórias e respostas envolvidas no problema, como listadas no *Encore*© 5.0.

	Name	Distribution	Mean	Std Dev
1	a	Normal	2.0	0.02
2	L	Normal	6.0	0.02
3	P	Normal	40000.0	400.0
4	YS	Normal	800.0	8.0
5				

Current Status  
 \*\*\*\*\* Please wait.....Initializing Toolkit Environment \*\*\*\*\*  
 Toolkit Initialization: Setting context to project "Untitled"

Figura 3-24: Quadro de variáveis aleatórias do *Encore*© 5.0

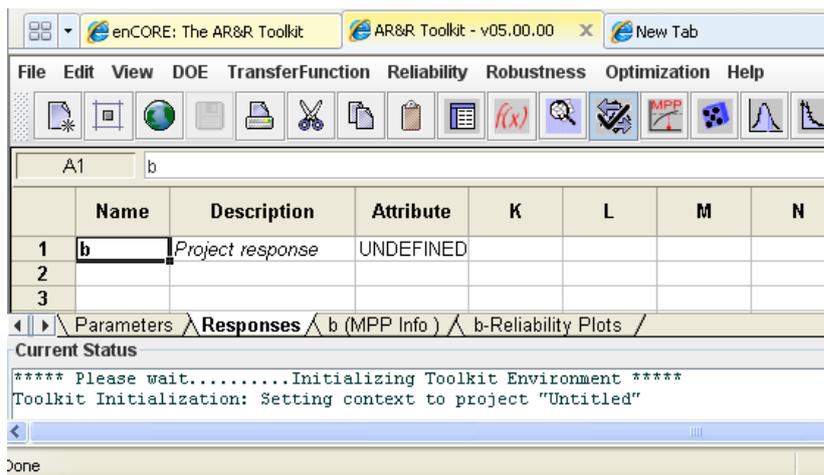


Figura 3-25: Quadro de respostas do Encore© 5.0

O programa gera cerca de mil pontos aleatórios para calcular o mínimo valor de *b*

$$b = 0,05974m = 59,74mm \tag{3.91}$$

e a influência de cada variável, como visto na Figura 3-26.

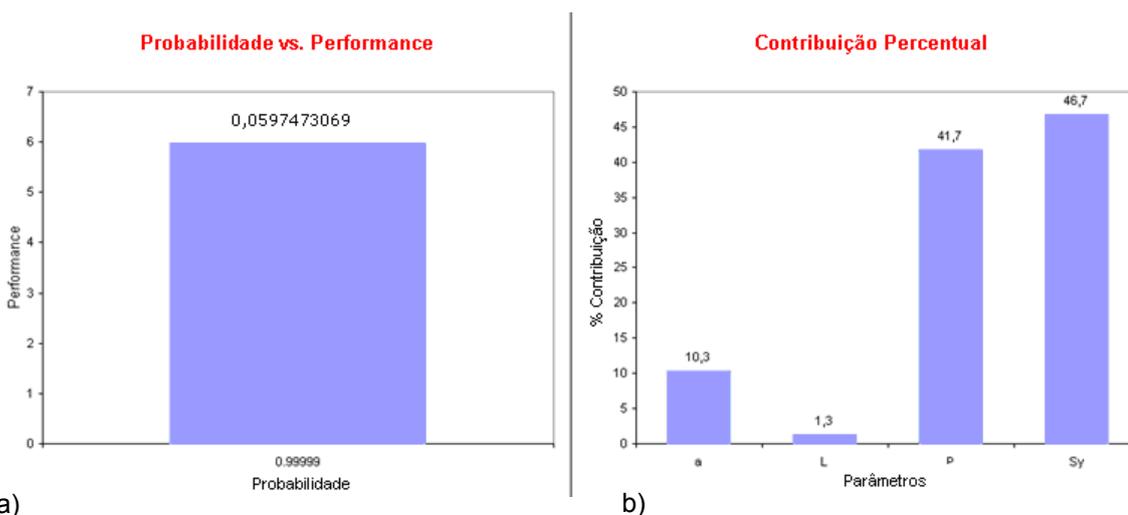


Figura 3-26: a) Valor de *b* para confiabilidade (probabilidade) de 0,99999; b) Contribuição percentual de cada variável aleatória na determinação de *b*;

Usando o coeficiente de variância definida pelo problema, calcula-se o desvio padrão

$$COV_b = \frac{S_b}{b} = 0,02 \Leftrightarrow S_b = 0,02 \cdot 59,74mm = 1,1948mm \tag{3.92}$$

Pode-se utilizar o programa computacional Minitab© para gerar a curva de distribuição de probabilidade (Figura 3-27) para a dimensão *b* e sua curva de distribuição cumulativa (Figura 3-28).

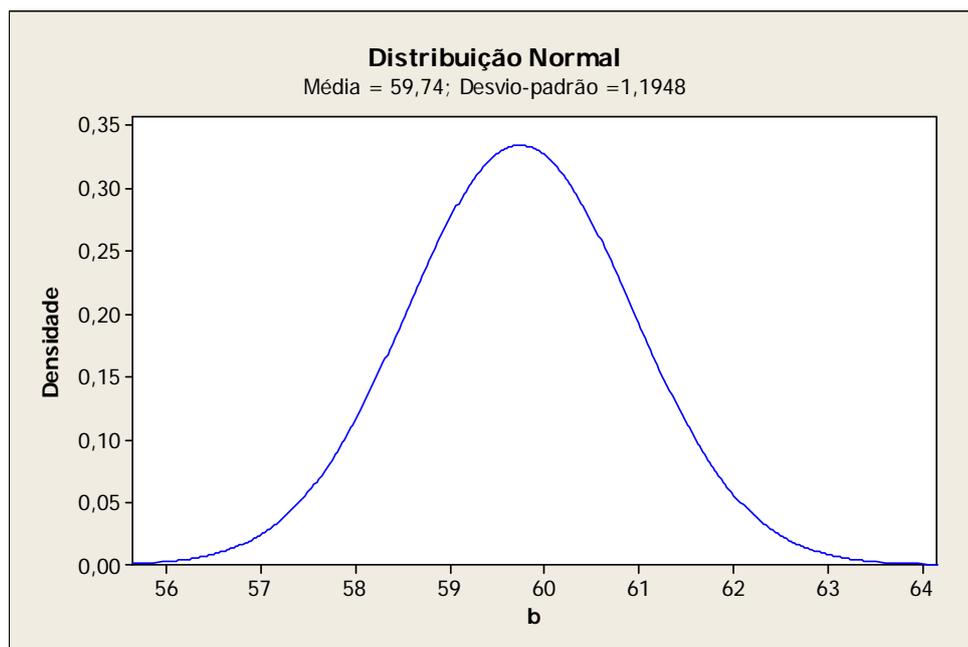


Figura 3-27: Curva de distribuição de probabilidade da variável b

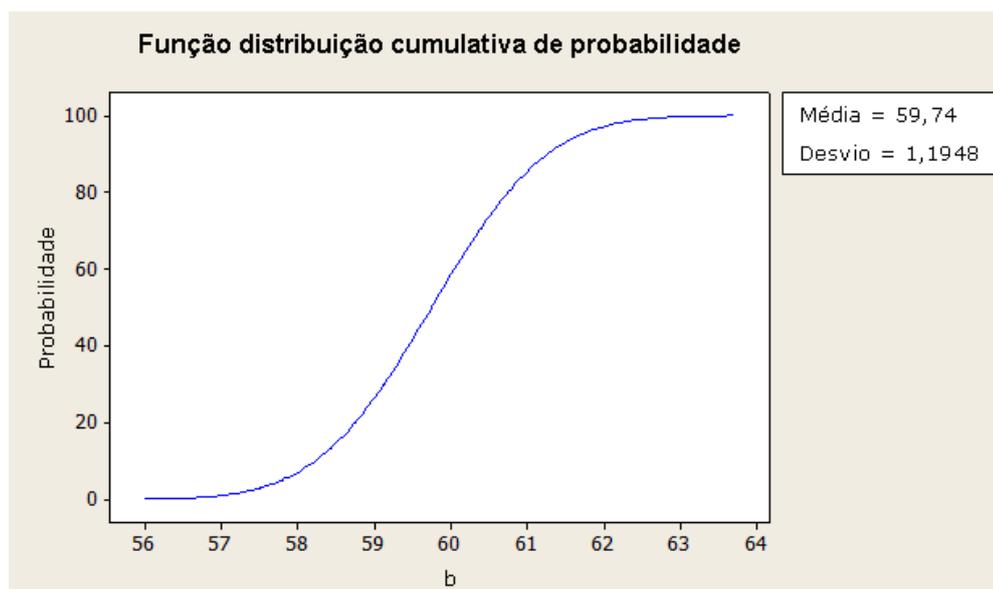


Figura 3-28: Curva de distribuição cumulativa de b

Usando a curva de distribuição cumulativa (Figura 3-28), para uma confiabilidade de 99,999%, determina-se a dimensão b procurada como sendo igual

$$b = 64,8357\text{mm} \quad (3.93)$$

Um comentário final é que a padronização das variáveis aleatórias, condição obrigatória para utilização do método FORM, é feita automaticamente pelo *Encore*® e não requer qualquer preocupação pelo seu usuário.

### 3.12.4. Abordagem IV – Método de Monte Carlo

No método de Monte Carlo, as variáveis são tratadas como aleatórias e não necessariamente normalmente distribuídas.

As condições de Q,S,e G são as mesmas que as apresentadas na seção 3.12.3, ou seja,

- A capacidade Q é determinada pela equação (3.86);
- O carregamento S é calculado pela equação (3.87);
- O estado – limite G é determinado pela equação (3.88);
- A condição de falha é representada pela equação (3.89);
- A equação geral de b, no ponto de projeto, é representada pela equação (3.90);

Para realizar a simulação do Método de Monte Carlo, será utilizado o programa computacional *Crystal Ball© Fusion Edition 11.1*.

Uma condição muito importante na simulação de Monte Carlo é garantir que as variáveis aleatórias sejam não-correlacionadas. Pode-se verificar tal condição por meio de gráficos de dispersão da Figura 3-29, gerados no programa computacional *Crystal Ball©*, durante a simulação computacional do método de Monte Carlo. Tal simulação foi feita com cerca de 5.000 execuções, sendo cada execução representada nos gráficos de dispersão na Figura 3-29 por meio de um ponto.

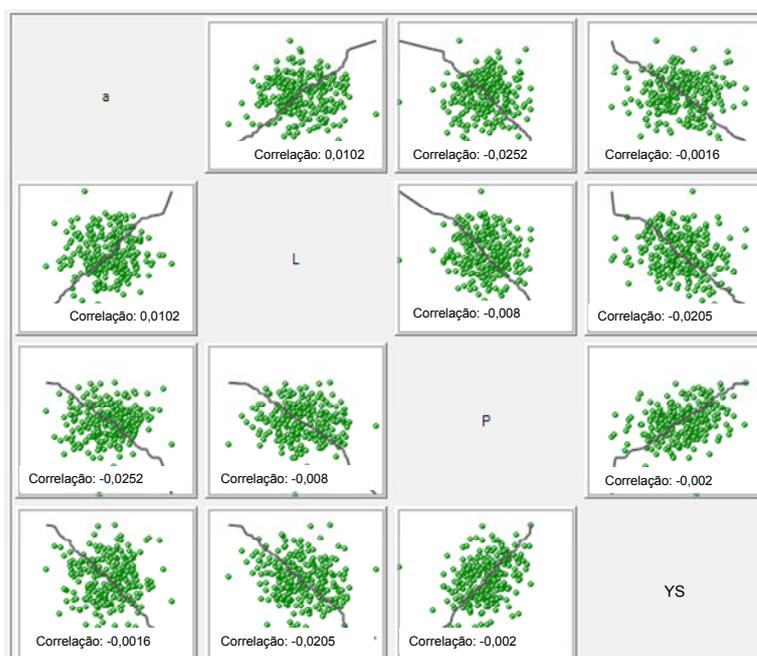


Figura 3-29: Gráficos de dispersão das variáveis aleatórias a,L,P,Sy

Pode-se perceber que em nenhum dos gráficos da Figura 3-29 existe uma distribuição de pontos ao longo das linhas de correlação. Além disso, verifica-se que o índice de correlação é muito próximo de zero em todos os gráficos.

Ainda usando o *Crystal Ball*®, é possível determinar o mínimo valor de  $b$  como sendo

$$b = 0,05798m = 57,98 \text{ mm} \quad (3.94)$$

Usando o coeficiente de variância definida pelo problema, calcula-se o desvio padrão

$$COV_b = \frac{S_b}{b} = 0,02 \Leftrightarrow S_b = 0,02 \cdot 57,998mm = 1,15996mm \quad (3.95)$$

Pode-se gerar a curva de distribuição de probabilidade (Figura 3-30) para a dimensão  $b$  e sua curva de distribuição cumulativa (Figura 3-31).

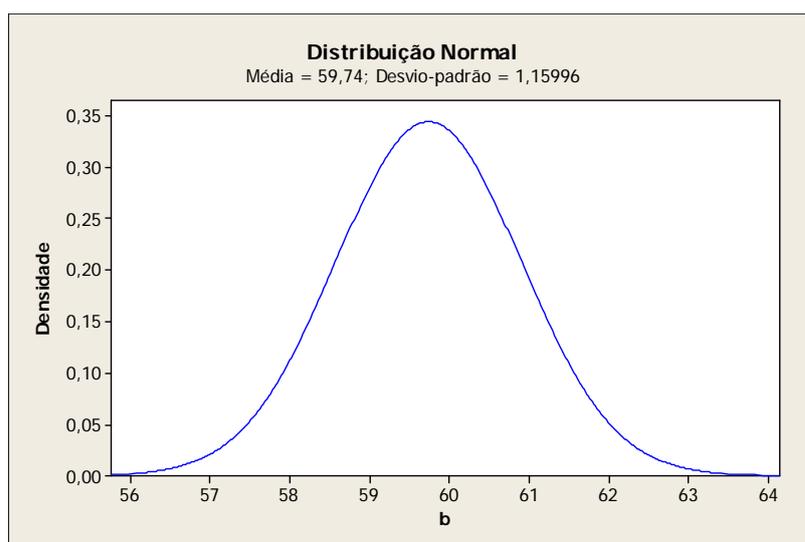


Figura 3-30: Curva de distribuição de probabilidade da variável  $b$

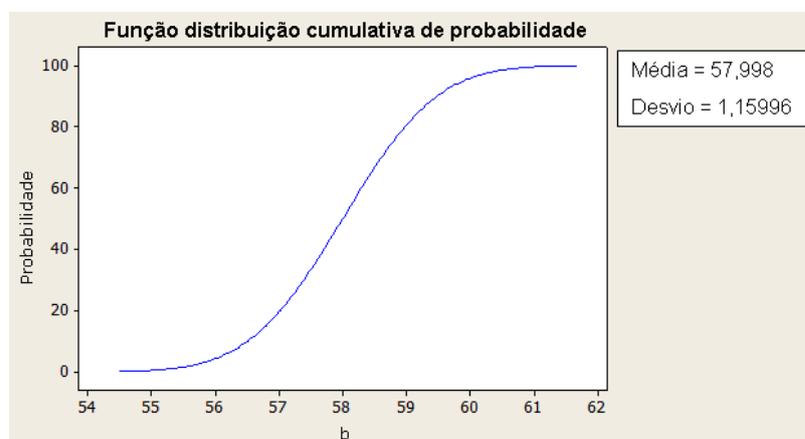


Figura 3-31: Curva de distribuição cumulativa de  $b$

Usando a curva de distribuição cumulativa (Figura 3-31), para uma confiabilidade de 99,999%, determina-se a dimensão  $b$  procurada como sendo igual a

$$b = 62,94\text{mm} \quad (3.96)$$

### 3.12.5. Conclusão sobre os métodos de predição de confiabilidade

Para comparar os diferentes métodos de predição de confiabilidade entre si, em uma situação de interferência carregamento-capacidade, foi considerado o método de Monte Carlo como sendo o método de referência.

Método de resolução	Dimensão "b" (mm)	Número de simulações "n"	Erro
Método determinístico	$b = 66,94$	$n = 1$	$Erro = \frac{66,94 - 62,94}{62,94} \times 100\%$ $Erro = 6,35\%$
Método FOSM	$b = 63,26$	$n = 1$	$Erro = \frac{63,26 - 62,94}{62,94} \times 100\%$ $Erro = 0,5\%$
Método FORM	$b = 64,83$	$n = 1.000$	$Erro = \frac{64,83 - 62,94}{62,94} \times 100\%$ $Erro = 3,0\%$
Método de Monte Carlo Simples	$b = 62,94$	$n = 5.000$	$Erro = -$ (Método-referência)

Tabela 3-7: Tabela comparativa entre os métodos e seus erros

Percebe-se pela Tabela 3-7 que o método determinístico possui o maior erro em relação ao método de Monte Carlo, o que reforça a necessidade da verificação da interferência carregamento-capacidade.

Quanto ao método FOSM, seu erro se mostrou pequeno em relação ao método de Monte Carlo, como salientado por Kececioglu (2003). Contudo, tal método só deve ser utilizado quando todas as variáveis aleatórias envolvidas possuírem distribuição normal, com médias e desvios - padrão conhecidos.

Quanto ao método FORM, seu erro se mostrou menor que o determinístico e converge mais rapidamente que o de Monte Carlo, visto que foram utilizados cerca de 1/5 da quantidade de pontos utilizados pelo Monte Carlo. Contudo, segundo Rackwitz (2001), apesar do número reduzido de simulações, o método FORM deve ser preterido em relação ao método de Monte Carlo, pois convergirá para um resultado exato apenas quando as variáveis aleatórias possuem distribuição de probabilidade normal. Caso contrário, mesmo realizando a padronização das variáveis aleatórias, o resultado poderá divergir.

Como conclusão final, concorda-se que, para uma situação de interferência carregamento-capacidade, os métodos de predição de confiabilidade devem ser preferidos em relação ao método determinístico. Contudo a seleção de tal método de predição deve seguir algum processo mais criterioso. A simples escolha do método de Monte Carlo, como orientado por Rackwitz (2001) pode demandar por uma maior capacidade de processamento numérico na determinação da confiabilidade.

#### 4. SIMULAÇÃO DE CONFIABILIDADE EM COMPONENTES ESTRUTURAIS AUTOMOTIVOS

Existe hoje na indústria automotiva uma tendência em reduzir o número de protótipos físicos e confiar mais na engenharia assistida por computador (CAE - *Computer Aided Engineering*) para o dimensionamento e projeto final das estruturas do veículo. Contudo, a tradicional abordagem determinística de dimensionamento não leva em conta o grau de variabilidade das solicitações atuantes e suas respostas. Qualquer pequena variabilidade nos parâmetros de influência do projeto resulta na utilização de fatores de majoração das condições de carregamento e/ou capacidade, o que pode ser excessivamente conservador e resultar em penalidades de peso e custo.

A utilização de uma abordagem probabilística, como o conceito de interferência carregamento-capacidade, resulta em um dimensionamento mais adequado, mas requer a execução de diversas simulações de CAE para atingir o resultado desejado. Além disso, é importante que haja um processo capaz de diminuir o número de simulações necessárias para aprovar uma proposta de projeto. Na maioria dos casos é economicamente impossível verificar todas as combinações possíveis. Um simples caso envolvendo quatro variáveis aleatórias (também chamados de fatores), cada um com cerca de 50 valores possíveis (também chamados de níveis) leva a uma necessidade de avaliar cerca de  $50^4 = 6.250.000$  simulações.

O presente trabalho propõe a utilização do processo “Simulação de confiabilidade em componentes estruturais automotivos”, baseado em proposta de Agrawal et al. (1997) e representado na Figura 4-1.a, para reduzir o número de simulações necessárias para a realização de um experimento computacional de determinação da confiabilidade de um componente estrutural automotivo, quando submetido a uma situação de interferência carregamento-capacidade.

O processo proposto apresenta oito etapas, sendo a última, na verdade, um sub – processo (detalhado na Figura 4-1.b) que possui uma árvore de estruturas de decisões desenhada para selecionar o método de predição de confiabilidade mais adequado a resolução do problema proposto.

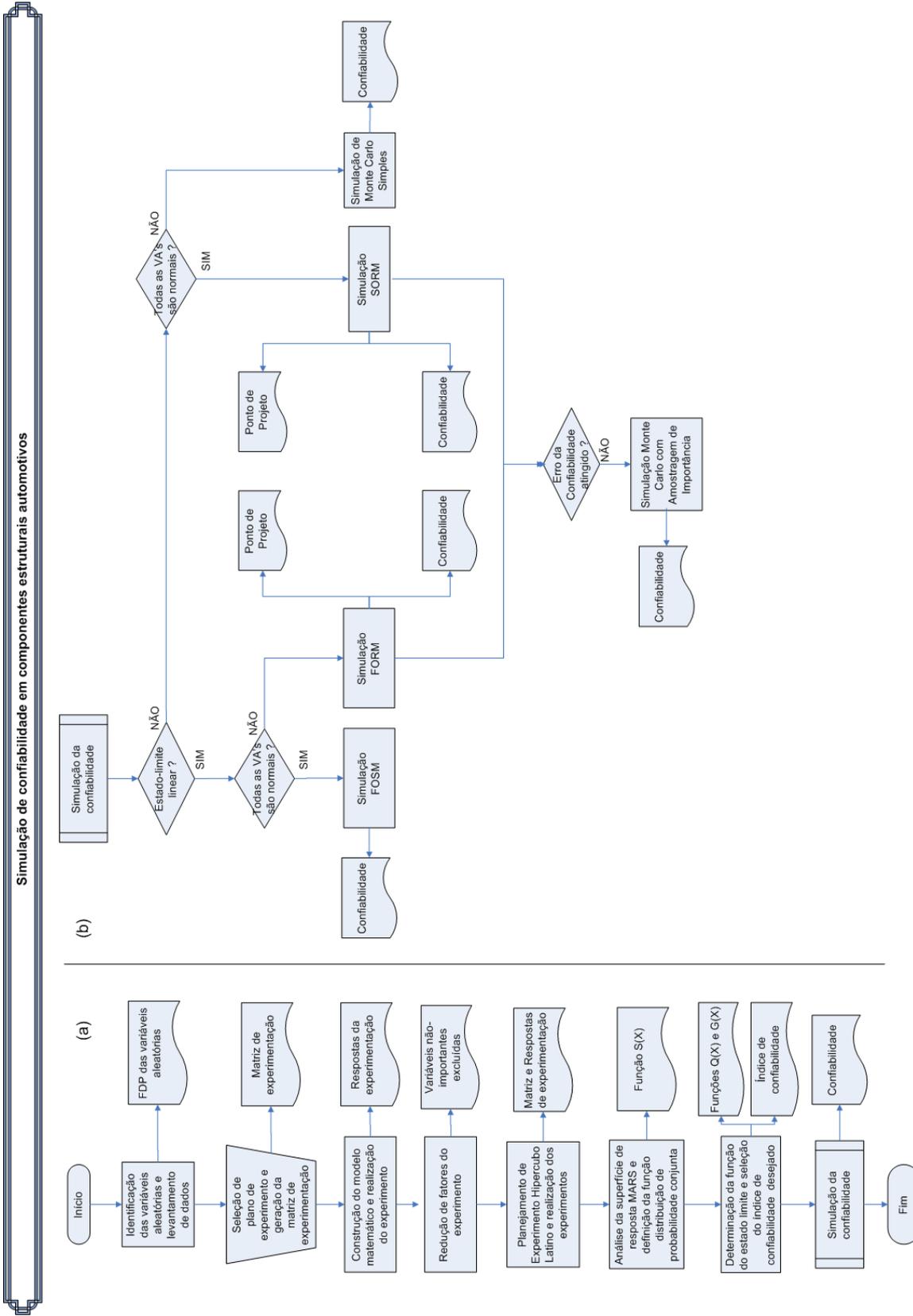


Figura 4-1: a) Fluxograma “Simulações de Confiabilidade em componentes estruturais automotivos”, adaptado de (AGRAWAL et al., 1997); b) Sub-processo “Simulação da confiabilidade”.

#### 4.1. Identificação de variáveis aleatórias e levantamento de dados

Nesta primeira etapa do processo identificam-se as variáveis aleatórias envolvidas com o problema em questão e suas funções distribuição de probabilidade. Tal identificação deve levar em conta não apenas as variáveis de projeto, mas também informações provenientes de diversas ferramentas de qualidade como Pesquisas de mercado, Diagramas de parâmetros, Análise de mecanismos de falhas e efeitos, Análise de garantia, entre outras. Além disso, também podem ser utilizados dados históricos, literaturas técnicas, cartas de controle estatístico, ou mesmo a realização de experimentos físicos para a coleta de tais informações. A Figura 4-2 relaciona diversas ferramentas de qualidade com as diversas etapas de um ciclo genérico de desenvolvimento de produto.

Idéia	Conceito	Projeto	Validação da pré-produção	Produção /Distribuição	Pós-Venda
Pesquisas de Mercado	Diagrama de Blocos	Estratégia de gerenciamento dos Fatores-ruídos	Métodos básicos / avançados de testes	Análise dos modos de falha do Processo e seus efeitos	Pesquisas de Mercado
Análise de garantia	Análise da Árvore de Falha	Projetos a prova de erros	Análise de Degradação	Projetos de Experimentos	Análise de garantia
Análise de riscos	Análise de Causas Raízes	Análise de tolerâncias	Testes Key-Life	Prova de erros	Análise de riscos
Perfil de uso	Funções Transferência	Check-List da confiabilidade e robustez	Gráficos de Probabilidade	Métodos de controle de processos	
Desenvolvimento da Função Qualidade	Fatores-Ruídos	Distribuições estatísticas	Matriz de demonstração da confiabilidade e robustez		
Análise comparativa de confiabilidade	Diagrama de parâmetro	Interferência Carga-Carregamento			
Especificações de Projeto de Sistemas	Análise dos modos de falha do projeto e seus efeitos				

Figura 4-2: Etapas de um ciclo de desenvolvimento de produto e suas ferramentas de qualidade.

O detalhamento de tais ferramentas está fora do escopo desta dissertação. Por isso, durante a fase de experimentação será levado em conta apenas as variáveis de projeto. Contudo, deve ser ressaltado que a plena utilização de informações provenientes do gerenciamento da qualidade é fundamental para atender os

interesses dos consumidores e estabelecer vantagens competitivas em relação aos competidores.

#### 4.2. Seleção de plano de experimento e geração da matriz de experimentação

Após identificar as variáveis aleatórias envolvidas e levantar os dados numéricos relativos, devem-se eliminar as variáveis não - importantes para a resolução do problema. A importância desta etapa está na diminuição do número de experimentos necessários para determinação da função superfície de resposta e da melhoria da convergência do método de predição de confiabilidade, que serão utilizados para calcular a probabilidade de falha desejada.

A forma de se identificar o grau de importância das variáveis aleatórias envolvidas é por meio da análise de fatores de um experimento. Faz-se então necessário selecionar um plano de experimento.

Nesta segunda etapa do processo será utilizado o plano Fatorial  $2^{K-1}$ . A escolha deste plano deve-se ao fato de que, como na indústria automotiva tais experimentos têm alto custo operacional, seja o experimento físico ou numérico, o plano de experimento adotado deve ter um mínimo número de pontos possível, de modo a minimizar o custo de execução dos experimentos.

Após a seleção do plano de experimento gera-se uma matriz de experimentação, ou seja, uma matriz contendo todos os dados necessários para a realização dos experimentos. Enquanto as colunas da matriz representam os fatores do experimento, as linhas representam as combinações de possível ocorrência, de acordo com o plano de experimento adotado.

Durante o experimento computacional deste trabalho será utilizado o programa computacional *Minitab*© 15 para gerar a matriz de experimentação do plano Fatorial  $2^{K-1}$ .

### 4.3. Elaboração do modelo matemático e realização do experimento

Nesta terceira etapa do processo constrói-se o modelo computacional do componente que será analisado durante as simulações de confiabilidade estrutural. Além disso, faz-se a discretização da geometria em elementos finitos, definindo suas restrições e selecionando os elementos finitos mais adequados para a correta representação do problema físico analisado e correta geração de malha.

Após a construção e discretização do modelo, determinando-se o tamanho de elemento mais adequado a resolução do problema por meio de um teste de convergência, executam-se as simulações numéricas para determinar as respostas associadas a cada combinação da matriz de experimentação.

Durante a experimentação numérica deste trabalho será utilizado um modelo computacional de um componente estrutural fornecido em cortesia pela *Ford Motor Company*®. Será utilizado o programa computacional *Cosmos*® para gerar o modelo discretizado pelo Método de Elementos Finitos (MEF) e executar as simulações numéricas do experimento.

### 4.4. Redução de fatores do experimento

Nesta quarta etapa identificam-se e eliminam-se os fatores não - importantes do plano de experimento Fatorial  $2^{K-1}$ . Essa eliminação irá ajudar a reduzir os custos de experimentos da etapa de determinação da função superfície de respostas.

Durante o experimento computacional deste trabalho será utilizado o programa computacional *Minitab*® 15 para a realização da Análise de Fatores Principais e Análise de Pareto das Interações.

Após a redução dos fatores, o *Minitab*® 15 usa o método de regressão expansão polinomial de primeiro grau para gerar uma função superfície de resposta. Tal função não deve ser considerada como adequada para aplicação dos métodos de predição de confiabilidade FOSM, FORM e SORM, já que foi baseada apenas nos pontos mínimos e máximos de cada fator.

#### 4.5. Planejamento de experimento Hipercubo Latino e realização de experimentos

Na quinta etapa do nosso processo, depois de descartadas as variáveis aleatórias não - importantes, deve-se selecionar um novo plano de experimento, agora envolvendo outros níveis, além dos mínimos e máximos, para gerar uma superfície de resposta mais adequada aos métodos de predição de confiabilidade FOSM, FORM, e SORM.

Para tanto será utilizado o plano de experimento Hipercubo Latino, que é capaz de gerar pontos envolvendo todos os níveis possíveis, sem que haja repetições das combinações. Tal decisão também ajuda a reduzir os custos de experimentos da etapa de construção da superfície de respostas.

Na sequência, gera-se uma nova matriz de experimentação e executam-se novas simulações numéricas para determinar as respostas associadas a cada combinação da nova matriz de experimentação.

Durante o experimento numérico deste trabalho será utilizado o programa computacional *Encore*©5.0 para gerar a nova matriz de experimentação baseado no plano de experimento Hipercubo Latino.

#### 4.6. Análise da superfície de resposta MARS e definição da função distribuição de probabilidade conjunta.

O objetivo da sexta etapa do processo é definir a função distribuição de probabilidade conjunta  $S(\mathbf{X})$  das variáveis aleatórias que representam as condições de carregamento. Tal função será a própria função regressão da superfície de respostas MARS, que será gerada a partir das respostas calculadas para a matriz de experimentação do Hipercubo Latino.

A escolha do método MARS foi baseada no fato de que o método MARS gera um modelo contínuo e com derivadas contínuas, adequado aos métodos de predição de confiabilidade FOSM, FORM e SORM;

Vale ressaltar que, após determinada a função MARS, deve-se verificar a validade desta função. Tal validação é feita visualmente por meio dos quatro testes de verificação da ANOVA: Verificação de normalidade, Histograma de resíduos, Ordem de observação x Resíduos, Ajustes x Resíduos.

#### 4.7. Determinação da função estado - limite e seleção do índice de confiabilidade desejada

Nesta etapa define-se a função estado - limite  $G(X)$ , que representará os mecanismos de falha do problema pesquisado, e o valor-alvo do índice de confiabilidade que a estrutura deve ter.

A função estado - limite será uma modificação da função MARS calculada na etapa anterior, e que deverá incorporar as variáveis aleatórias da condição de resistência  $Q(X)$ .

Durante o experimento computacional deste trabalho será utilizada a orientação do JCSS (2001) para definir o valor-alvo do índice de confiabilidade. Contudo, é perfeitamente possível que se use outro valor, conforme a orientação estratégica de cada indústria automotiva, para atender os interesses de seus consumidores e acionistas, ou ainda para atender exigências legais. Dessa forma, outras fontes de orientação podem ser entidades governamentais, normas técnicas, entidades de classes ou centros de pesquisa renomados.

#### 4.8. Simulação da confiabilidade

Na oitava e última etapa do processo será enfim calculada a confiabilidade do componente estrutural analisado. Para tanto, utiliza-se o sub - processo “Simulação da confiabilidade” para identificar o método de predição de confiabilidade a ser utilizado.

O sub - processo utilizar algumas questões específicas para selecionar o método adequado:

1. A função estado – limite é linear? Caso a resposta seja não, procede-se com a questão 3;
2. Caso a resposta para a primeira pergunta seja sim, todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema seguem uma distribuição normal? Caso a resposta seja sim, recomenda-se o uso do método FOSM para determinar a probabilidade de falha. Caso a resposta para a segunda pergunta seja não, recomenda-se o uso do método FORM para determinar a probabilidade de falha.
3. Caso a resposta para a primeira pergunta seja não, ou seja, a função estado - limite é não-linear, todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema seguem uma distribuição normal? Caso a resposta seja sim, recomenda-se o uso do método SORM para determinar a probabilidade de falha. Caso a resposta para a segunda pergunta seja não, recomenda-se o uso do método de Monte Carlo Simples para determinar a probabilidade de falha.

Escolhido o método, simula-se a confiabilidade do componente automotivo, determinando o valor da função estado - limite para tal confiabilidade e indicando se o componente está em uma região segura ou de falha, além de determinar o real fator de segurança do projeto conforme a confiabilidade desejada.

É possível também gerar uma curva de função distribuição de probabilidade e uma curva de distribuição cumulativa de probabilidade e determinar outros valores de confiabilidade para a mesma função estado - limite.

Além disso, é possível também calcular a contribuição percentual de cada variável aleatória na confiabilidade do componente e gerar uma estratégia de ajustes dos fatores para atingir outras confiabilidades desejadas.

Apesar da simplicidade do sub - processo, a seleção errada do método de predição pode demandar por um maior tempo de processamento numérico ou gerar um erro de valor não desejado na determinação da confiabilidade.

Vale ressaltar que, tanto em caso da utilização do método FORM quanto do método SORM ainda cabe uma última questão: o erro da confiabilidade foi atingido? Tal erro é na verdade a diferença entre dois valores consecutivos da probabilidade de falha, calculados durante a simulação numérica. Recomenda-se que tal erro seja menor que  $10^{-4}$  (observação prática). Caso a resposta seja não, recomenda-se o uso do método de Monte Carlo com Amostragem de Importância pra determinar a probabilidade de falha.

## 5. EXPERIMENTO NUMÉRICO

O objetivo final desta dissertação é verificar como a aleatoriedade das variáveis envolvidas no projeto de um componente automotivo pode afetar sua expectativa de performance. Para isso, foi realizado um experimento numérico com um componente claramente submetido a cargas aleatórias. Um exemplo de tal componente é o topo do corpo da suspensão traseira, ou simplesmente *Top Mount* (Figura 5-1). Sua principal função é suportar a suspensão veicular, ficando posicionado dentro da caixa de roda, como mostra a Figura 5-2.



Figura 5-1: Top Mount (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda)

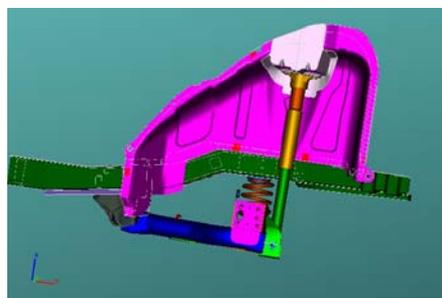


Figura 5-2: Montagem de suspensão, caixa de roda e Top Mount (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda)

Além de suportar diferentes valores de cargas, tanto devido ao peso como as diferentes condições de pista de rolamento a que um veículo pode ser submetido, o *Top Mount* ainda está submetido a variações do processo de fabricação da peça e da matéria-prima (aço).

Para a realização do experimento, seguimos a proposta de processo “Simulações de Confiabilidade em componentes estruturais automotivos”, representado na Figura 4-1.

### 5.1. Identificação de variáveis aleatórias e Levantamento de dados

As variáveis de projeto envolvidas no problema são a carga vertical **Pista** devido a qualidade da pista de rolamento, a carga vertical **Peso** devido a condição de peso do veículo (distribuído por roda), a espessura final da peça **Esp** devido as condições

de estampagem e os limites de escoamento **YS** e de ruptura **YR** devido a condição de fabricação da chapa de aço para estampagem.

Para conhecer os valores aleatórios da carga vertical **Pista** a que está submetido o *top mount*, por transferência da suspensão, devido a qualidade das pistas de rolamento, foram instalados transdutores de movimento na suspensão de um veículo tipo utilitário esportivo.

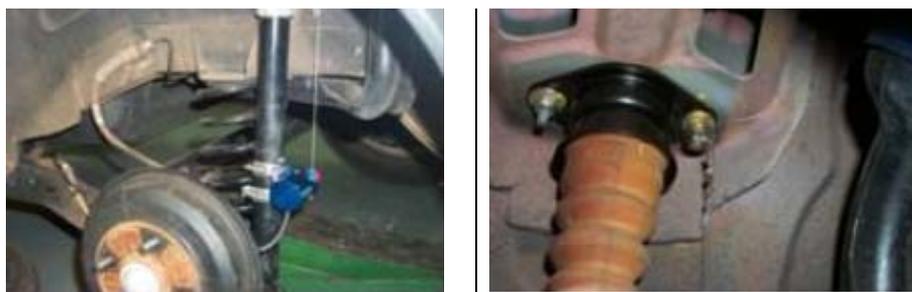


Figura 5-3: Instalação de transdutor em suspensão automotiva (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda)

Foram percorridos cerca de nove tipos de pistas diferentes, para estabelecer os valores máximo e mínimo da carga **Pista** a qual o *top mount* poderia ser submetido durante sua utilização pelo consumidor (Tabela 5-1). Algumas destas pistas estão exemplificadas na Figura 5-4.



Figura 5-4: Exemplo de pistas para testes de veículos automotores (cortesia da Ford Motor Company© do Brasil Ltda)

Pista	Fmax (N)	Fmin (N)	DeltaF (N)
Pista 01	924	-1403	2327
Pista 02	1259	-1571	2830
Pista 03	1259	-1571	2830
Pista 04	308	-681	989
Pista 05	2229	-1577	3806
Pista 06	2200	-1286	3486
Pista 07	1991	-1604	3595
Pista 08	1633	-2206	3839
Pista 09	2453	-1813	4266

Tabela 5-1: Leitura de cargas em diferentes tipos de pistas, com maior valor DeltaF em destaque.

Analisando os valores obtidos, percebe-se que a maior diferença entre valores máximos e mínimos **DeltaF** acontece na pista 09, quando a roda do veículo choca-

se com a “quina” de um buraco. Serão utilizados seus valores máximo e mínimo no plano de experimento.

Para conhecer os valores aleatórios da carga vertical **Peso** a que o componente foi submetido, foi realizada a análise da distribuição dos pesos cheio e vazio do veículo por roda (Tabela 5-2). Como o mesmo *top mount* pode ser instalado nas rodas traseiras direita e esquerda, utilizaram-se os valores máximos e mínimos entre as duas configurações no plano de experimento.

Apenas como comentário, a definição de Peso cheio equivale ao peso do veículo adicionado do peso estimado do motorista, da máxima carga útil, máxima capacidade de passageiros e máximo volume de combustível. Quanto ao peso vazio do veículo, equivale apenas ao peso do veículo adicionado do peso estimado do motorista e de um quarto do máximo volume de combustível.

Nome	Peso (N)	Nome	Peso (N)
Peso do carro (cheio)	16702,84	Peso do carro (vazio)	12739,12
Roda DE (cheio)	4515,88	Roda DE (vazio)	3444,22
Roda DD (cheio)	4377,84	Roda DD (vazio)	3338,94
Roda TE (cheio)	3825,68	Roda TE (vazio)	2917,81
Roda TD (cheio)	3983,44	Roda TD (vazio)	3038,14

Tabela 5-2: Distribuição de pesos (cheio e vazio) do veículo por roda, com máximo e mínimo valores em destaque.

Quanto aos valores aleatórios das outras variáveis (**Esp**, **YS** e **YR**), serão utilizadas as condições-padrão do fabricante de aços Arcelor-Mittal© para o material aço-liga de alta resistência DP-980 LCE, laminado a frio. Segundo Arcelor-Mittal (2008), o aço DP-980 oferece uma excelente combinação de capacidade e estampabilidade, sendo recomendada sua utilização em peças automotivas estruturais, como longarinas, reforços e torres de suspensão.

A Tabela 5-3 traz os valores máximos e mínimos para as citadas variáveis aleatórias, que serão utilizadas no plano de experimento

Propriedades mecânicas

Peça	Material	Propriedades mecânicas	Min	Max
Top Mount	Aço AcellorMittal DP-980 LCE	Espessura (mm)	2,5	2,68
		YS (MPa)	600	750
		YR (MPa)	980	1100

Tabela 5-3: Propriedades mecânicas do *top mount*

## 5.2. Seleção de plano de experimento e geração da matriz de experimentação

Como regra geral na indústria automotiva, o plano de experimento a ser adotado deve ter um mínimo número de pontos possível, devido ao alto custo para a realização dos experimentos. Contudo, como o experimento é estritamente computacional e possui apenas cinco fatores de dois níveis, foi utilizado o plano de experimento Fatorial  $2^{K-1}$  que requer apenas 16 experimentos.

A Figura 5-5 mostra uma fração do plano de experimento, com dois fatores.

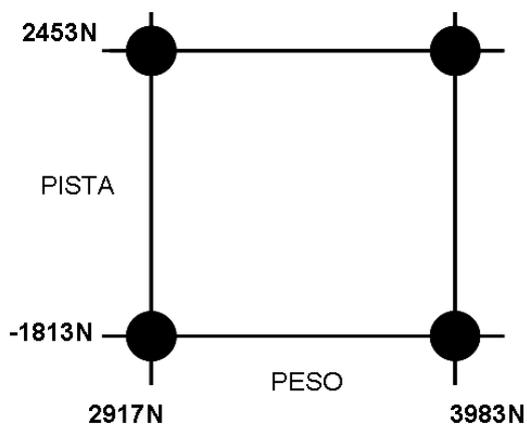


Figura 5-5: Plano de experimento PESO x PISTA

Após a seleção do plano de experimento, gerou-se a matriz de experimentação (Tabela 5-4) por meio do programa computacional Minitab© 15. As colunas C1 a C4 são geradas automaticamente pelo programa computacional e não tem influência na realização do experimento. As colunas C5 a C9 são os valores (níveis) para as variáveis aleatórias (fatores) utilizados no experimento.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Peso	Pista	Esp	YS	YR	VM	FS
1	8	1	1	1	3983	2453	2.68	600	980		
2	10	2	1	1	3983	-1813	2.50	750	1100		
3	11	3	1	1	2917	2453	2.50	750	1100		
4	9	4	1	1	2917	-1813	2.50	750	980		
5	7	5	1	1	2917	2453	2.68	600	1100		
6	14	6	1	1	3983	-1813	2.68	750	980		
7	15	7	1	1	2917	2453	2.68	750	980		
8	3	8	1	1	2917	2453	2.50	600	980		
9	2	9	1	1	3983	-1813	2.50	600	980		
10	1	10	1	1	2917	-1813	2.50	600	1100		
11	6	11	1	1	3983	-1813	2.68	600	1100		
12	13	12	1	1	2917	-1813	2.68	750	1100		
13	12	13	1	1	3983	2453	2.50	750	980		
14	4	14	1	1	3983	2453	2.50	600	1100		
15	5	15	1	1	2917	-1813	2.68	600	980		
16	16	16	1	1	3983	2453	2.68	750	1100		

Tabela 5-4: Matriz de experimentação

Ainda sobre a Tabela 5-4, as colunas C10 e C11 são reservadas para os respectivos resultados dos experimentos (respostas), Tensão de Von-Misses (**VM**) e Fator de Segurança (**FS**). A resposta **VM** será calculada pelo Método de Elementos Finitos, enquanto que a resposta **FS** será a relação entre **VM** e **YS**.

### 5.3. Construção do modelo matemático e Realização do experimento

Após a construção da matriz de experimentos, foi necessária a geração da geometria do topo da torre de suspensão, ou *Top Mount*. Tal geometria foi disponibilizada como cortesia pela Ford Motor Company© do Brasil Ltda e exportada para o *Cosmos*©.

Quanto a análise de restrições, devido a falta do modelo da caixa de roda para inserir os pontos de solda conforme real localização (Figura 5-6) foi imposta restrição fixa nas faces onde tais pontos estariam localizados (Figura 5-7). Tal restrição impossibilita a movimentação dessas faces em seus graus de liberdade, como nos pontos de solda, mas tende a gerar tensões maiores que as reais nas faces específicas.

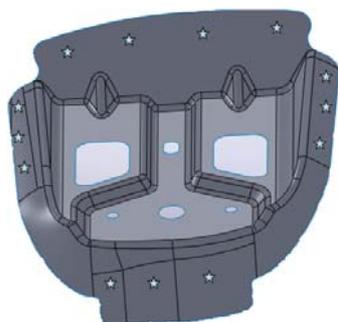


Figura 5-6: Localização dos pontos de solda (em estrela)



Figura 5-7: Faces com restrição fixa (em destaque)

Quanto a geração da malha, foi possível modelá-la utilizando o elemento de casca triangular parabólico de estado plano de tensões, com tamanho de 8,0mm.

Na face onde a suspensão é montada (em laranja, na Figura 5-8), o tamanho do elemento foi reduzido para 4,0mm e realizado controle de malha em torno dos furos, para melhorar a precisão da determinação das tensões e deformações. Tais opções resultaram em uma malha de 7236 elementos e 14750 nós (Figura 5-9), em um tempo de processamento de 12 segundos.

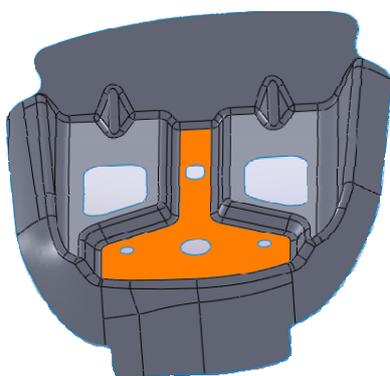


Figura 5-8: Face de montagem da suspensão (em destaque)



Figura 5-9: Visualização da malha

A escolha do tamanho 4,0mm para o elemento reduzido foi baseado no teste de convergência h-adaptativo. A Figura 5-10 mostra um princípio de divergência para o infinito da deformação específica do *Top Mount* a partir de 4,0mm de tamanho de elemento, justamente devido a aplicação das cargas **Peso** e **Pista** em uma zona de descontinuidade (três furos de diâmetros diferentes entre si).

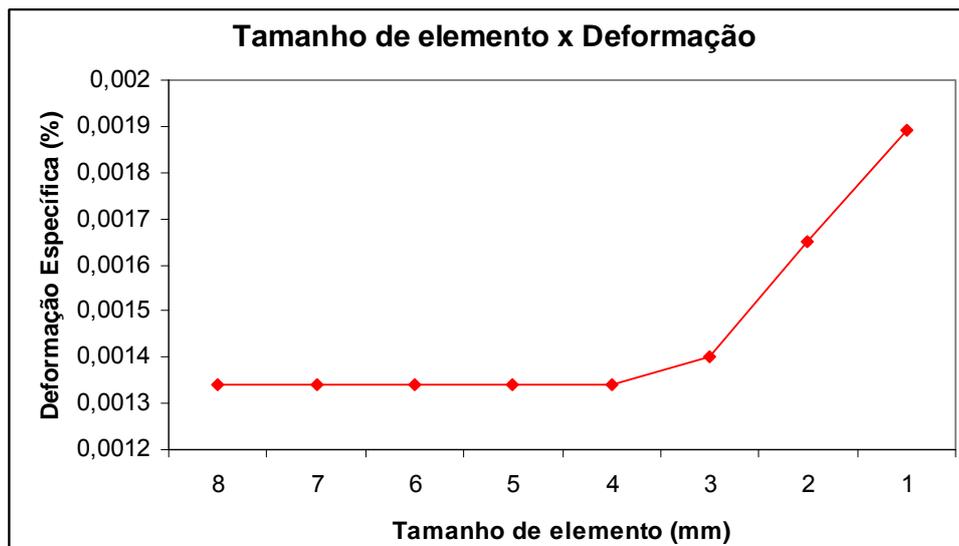


Figura 5-10: Teste de convergência h-adaptativo

A seguir foram realizadas as simulações numéricas para determinar as respostas VM e FS. A Figura 5-11 e a Figura 5-12 mostram a distribuição de tensões na superfície e a distribuição de deslocamentos dos elementos de superfície.

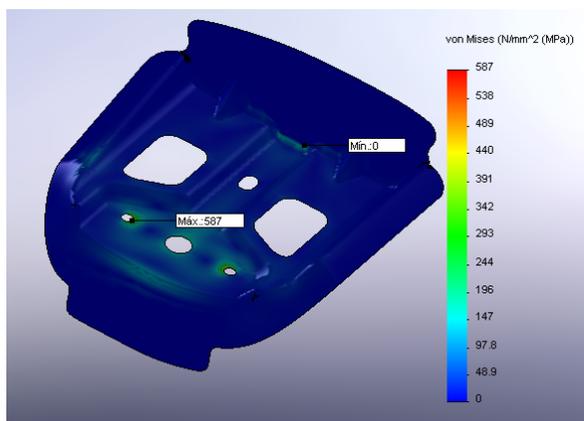


Figura 5-11: Distribuição de tensões estáticas

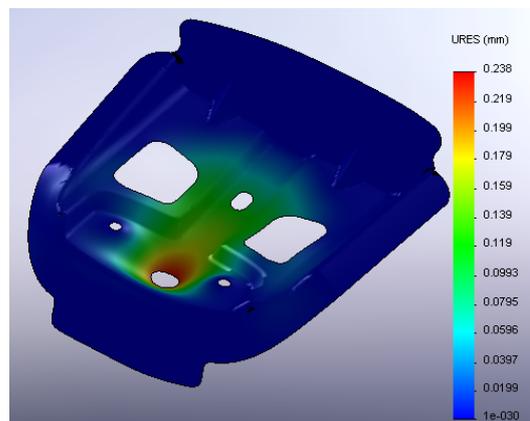


Figura 5-12: Distribuição de deslocamentos estáticos

Após o fim das simulações, as repostas foram inseridas na Matriz de experimentação (Tabela 5-5).

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Peso	Pista	Esp	YS	YR	VM	FS
1	8	1	1	1	3983	2453	2,68	600	980	521,0	1,15163
2	10	2	1	1	3983	-1813	2,50	750	1100	198,0	3,78788
3	11	3	1	1	2917	2453	2,50	750	1100	490,0	1,53061
4	9	4	1	1	2917	-1813	2,50	750	980	101,0	7,42574
5	7	5	1	1	2917	2453	2,68	600	1100	435,0	1,37931
6	14	6	1	1	3983	-1813	2,68	750	980	176,0	4,26136
7	15	7	1	1	2917	2453	2,68	750	980	435,0	1,72414
8	3	8	1	1	2917	2453	2,50	600	980	490,0	1,22449
9	2	9	1	1	3983	-1813	2,50	600	980	198,0	3,03030
10	1	10	1	1	2917	-1813	2,50	600	1100	101,0	5,94059
11	6	11	1	1	3983	-1813	2,68	600	1100	176,0	3,40909
12	13	12	1	1	2917	-1813	2,68	750	1100	89,3	8,39866
13	12	13	1	1	3983	2453	2,50	750	980	587,0	1,27768
14	4	14	1	1	3983	2453	2,50	600	1100	587,0	1,02215
15	5	15	1	1	2917	-1813	2,68	600	980	101,0	5,94059
16	16	16	1	1	3983	2453	2,68	750	1100	521,0	1,43954

Tabela 5-5: Matriz dos planos de experimentos e suas respostas

Para ilustrar o impacto da hipótese “*Pior situação*” comumente utilizada no processo determinístico de dimensionamento, foi gerado um gráfico de cubo para FS (Figura 5-13).

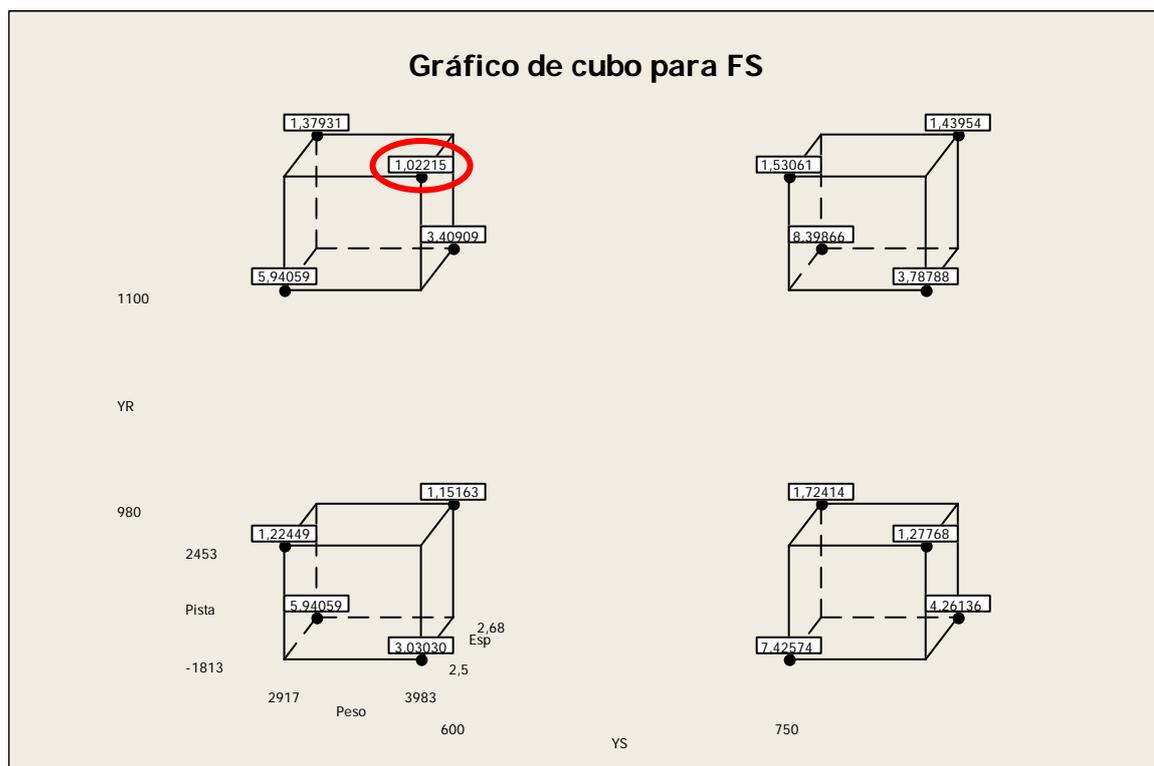


Figura 5-13: Gráfico de cubo (com dados médios) para FS, com mínimo valor em destaque

A Figura 5-13 exibe os valores de respostas possíveis para os 16 pontos do plano de experimento adotado. Percebe-se que o menor valor de resposta **FS** acontece quando os fatores **Pista** e **Peso** são máximos, **Esp** e **YS** são mínimos e **YR** é

máximo. Neste ponto, como o valor de resposta **FS** é maior que um, pode-se afirmar que o experimento está contido na zona de deformação elástica, seguindo a condição de existência da Lei de Hooke, e que o dimensionamento está adequado. No entanto, como tal valor de FS acontece com uma probabilidade de ocorrência igual a 6,25% (um dezesseis avos das ocorrências possíveis), verifica-se que o componente *Top Mount* estará superdimensionado para 93,75% das ocorrências possíveis.

#### 5.4.Redução de fatores do experimento

Para realizar a redução do número de fatores, foi utilizado o programa computacional Minitab© para gerar os gráficos “Análise de fatores principais para VM” (Figura 5-14) e “Análise de Pareto das interações para VM” (Figura 5-15).

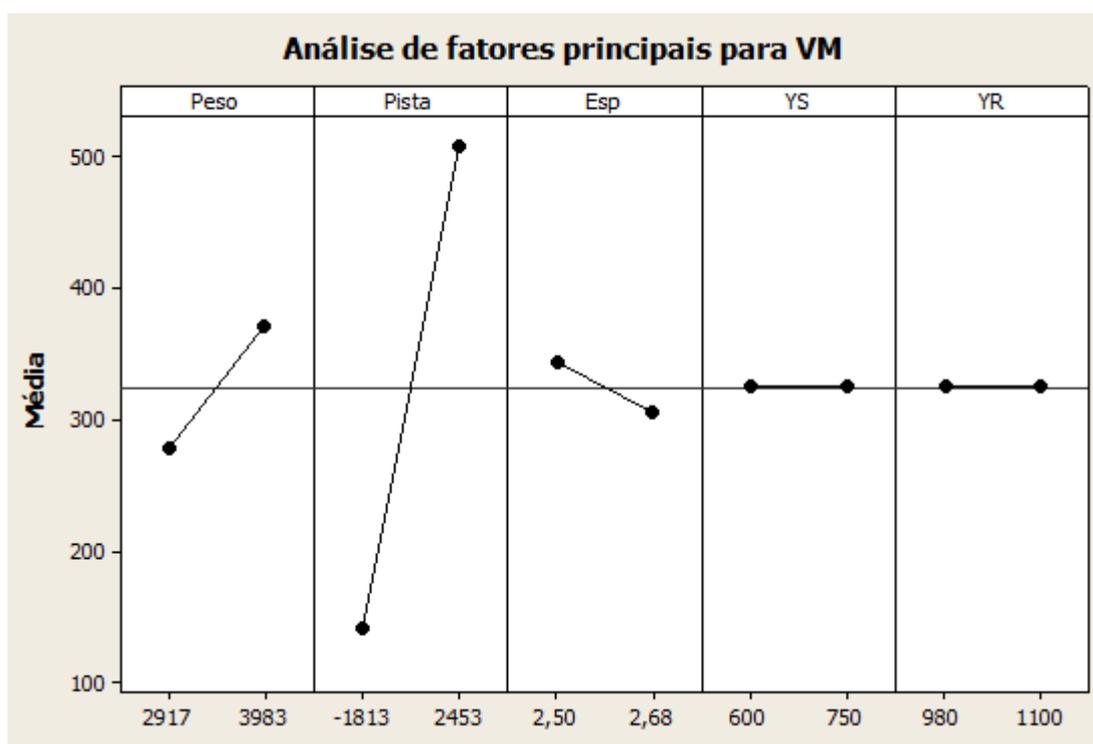


Figura 5-14: Análise de fatores principais para VM

Analisando a Figura 5-14, pode-se perceber que a variável que mais afeta a tensão de Von Misses **VM** é a carga **PISTA**. Vê-se também que as variáveis **Peso** e **ESP** também afetam a resposta **VM**. Além disso, como **YS** e **YR** estão na horizontal, pode-se afirmar que suas variações não têm impacto sobre a tensão de Von -

Misses **VM** e, por isso, podem ser eliminadas do experimento. De fato, a tensão de Von - Misses relaciona as cargas aplicadas ao material (carregamento), enquanto que **YS** e **YR** estão relacionadas as condições de resistência do material (capacidade).

Tal afirmação deve ser confirmada pela Análise de Pareto das Interações (Figura 5-15), que também mostra que nenhuma das interações das variáveis **YS** e **YR** é significativa (todas estão a esquerda do limite de Lenth igual a 2,2. Por isso, também podem ser eliminadas.

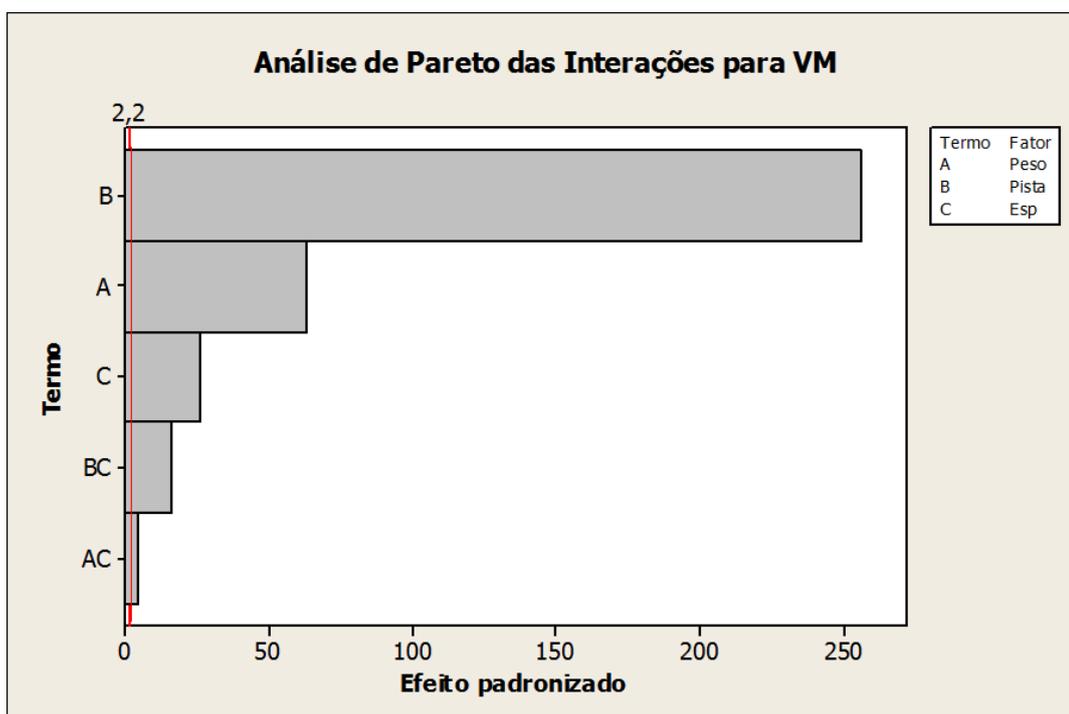


Figura 5-15: Análise de Pareto das Interações para VM

O refinamento da análise de Pareto (Figura 5-16) mostra que as únicas interações significativas são **Pista\*Esp** e **Peso\*Esp**, confirmando que **YS** e **YR** podem ser eliminadas.

O Minitab® utiliza o método de expansão polinomial de primeiro grau<sup>8</sup> para sugerir uma função superfície de resposta envolvendo as variáveis não eliminadas.

<sup>8</sup> O Método de expansão polinomial de primeiro grau está fora do escopo do trabalho, mas pode ser verificado em (SPIEGEL, 1978) e na documentação do Minitab® 15.

$$\begin{aligned}
 \text{Poli\_Linear\_VM} = & -140,989 \\
 & +0,267863 * \text{Peso} \\
 & +0,242821 * \text{Pista} \\
 & +56,7515 * \text{Esp} \\
 & -0,0707473 * \text{Peso} * \text{Esp} \\
 & -0,0606540 * \text{Pista} * \text{Esp}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

A validação de tal função é feita por meio dos testes de ANOVA (Figura 5-16):

- Verificação de normalidade;
- Histograma de resíduos;
- Ajustes x Resíduos
- Ordem de observação x Resíduos

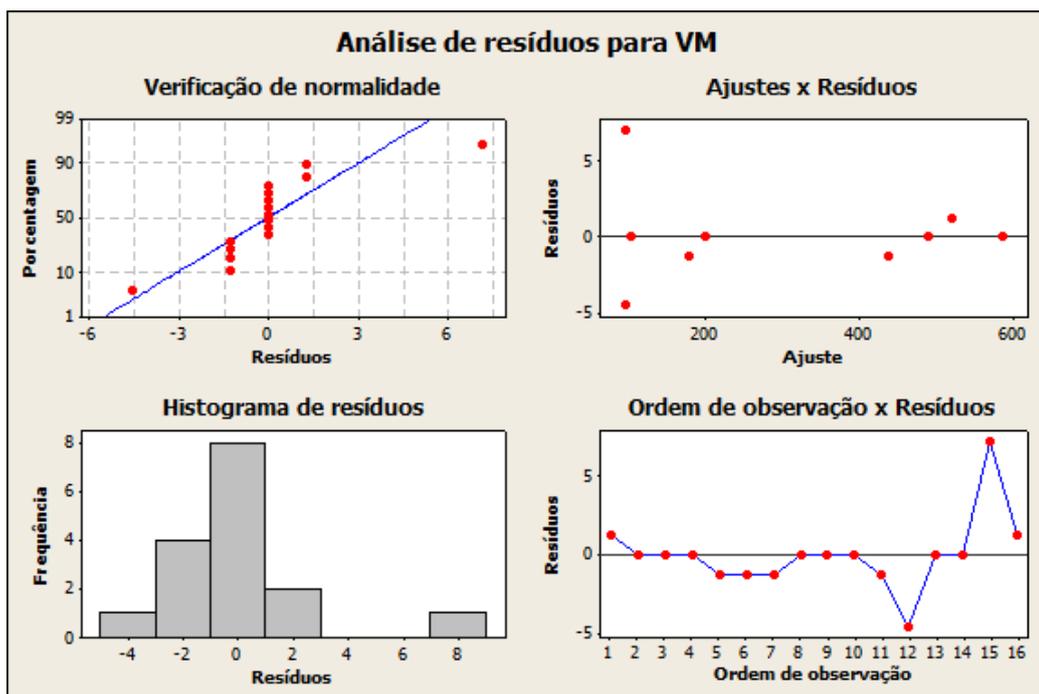


Figura 5-16: Análise de resíduos para VM

Vê-se na Figura 5-16 que todos os quatro testes de ANOVA falham e que, por isso, tal função superfície de resposta não deve ser utilizada como modelagem dos fatores. Além disso, como se vê no teste de normalidade, os pontos estão empilhados e distantes entre si, o que caracteriza uma função descontínua e não adequada para a realização de simulações de interferência carregamento - capacidade. Conclui-se que a equação (5.1) não é adequada para representar o

experimento. Deve-se então escolher outro plano de experimento (consequentemente, novas combinações e novos pontos) e repetir o experimento. Este é o objetivo da próxima etapa do experimento.

### 5.5. Planejamento de experimento Hipercubo Latino e realização de experimentos

Nesta etapa usam-se as funções distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias identificadas na primeira etapa do fluxograma para gerar uma matriz de experimentação por meio do método do Hipercubo Latino.

A variável aleatória da carga vertical **Peso** será modelada por meio de uma distribuição uniforme cujos valores mínimo e máximo são respectivamente 2917N e 3983N, como representado na Figura 5-17.

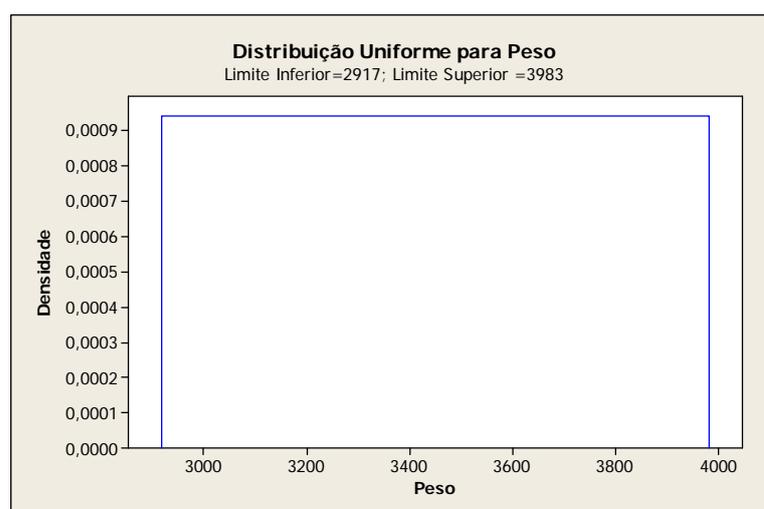


Figura 5-17: Proposta de distribuição uniforme para variável **Peso**

Sobre a variável aleatória da espessura **Esp**, visto que não foi possível localizar uma carta de controle estatístico para o aço DP-980 com 2,5mm, foi decidido usar uma carta-exemplo do aço DP-600 com 1,2mm de espessura (vide Figura 5-18) como referência, visto que ambos os materiais são feitos pelo mesmo fabricante e, supõe-se, nas mesmas condições de fabricação (fonte de matéria-prima, processo de fundição do ferro-gusa e processo de laminação do aço). É possível então usar os índices de capacidade  $P_p$  e  $P_{pk}$  encontrados na carta-exemplo do aço DP-600, pode-se determinar valores de espessura média e desvio-padrão para o aço DP-980.

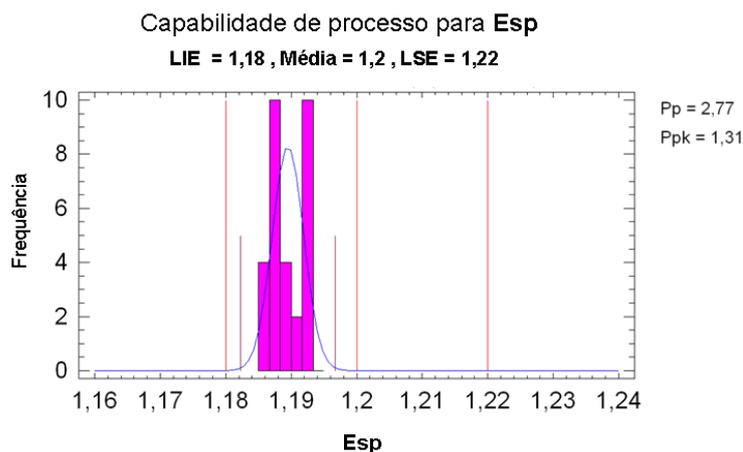


Figura 5-18: Exemplo de estudo de capacidade para espessura de 1,2mm do material aço DP-600 (Cortesia da Arcelor-Mittal)

Índices de capacidade servem para avaliar a capacidade de um processo em atender especificações desejadas pelo consumidor. Entre os vários índices de capacidade existentes, dois são extremamente importantes, Pp e Ppk. O índice Pp relaciona o desempenho do processo em atender a tolerância definida para o produto, sem se preocupar com a centralização do processo (ou seja, a média do processo não é necessariamente a média desejada pelo consumidor), sendo expresso pela equação

$$Pp = \frac{\text{Tolerância}}{6S_x} = \frac{LSE - LIE}{6S_x} \quad (5.2)$$

sendo LSE o limite superior de engenharia, LIE o limite inferior de engenharia e  $S_x$  o desvio-padrão do processo.

Já o índice Ppk relaciona o desempenho do processo em centralizar o processo, ou seja atender a média desejada pelo consumidor, sem levar em conta a tolerância definida para o produto, sendo expresso pela equação

$$Ppk = \text{mínimo}\left(\frac{\bar{x} - LIE}{3S_x}; \frac{LSE - \bar{x}}{3S_x}\right) \quad (5.3)$$

Considera-se que um processo estatisticamente controlado possui  $P_p \geq P_{pk} \geq 1$ . Em caso contrário, o processo não seguirá uma distribuição normal ou possuirá causas especiais como fonte de erros<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Mais detalhes sobre cartas de controle e índices de capacidade podem ser verificadas em (FORD, 1995).

Usando a equação (5.2), tem-se que

$$Pp = \frac{LSE - LIE}{6S_x} \Rightarrow S_x = \frac{LSE - LIE}{6Pp} = \frac{2,68 - 2,5}{6 \cdot 2,77} = 0,0108mm \quad (5.4)$$

Usando a equação (5.3), tem-se que

$$Ppk = \text{mínimo}\left(\frac{\bar{x} - LIE}{3S_x}; \frac{LSE - \bar{x}}{3S_x}\right) = \text{mínimo}(1,31; 4,24) = 1,31$$

$$\frac{\bar{x} - LIE}{3S_x} = 1,31 \Rightarrow \bar{x} = 1,31 \cdot 3 \cdot S_x + LIE = 1,31 \cdot 3 \cdot 0,0108 + 2,5 \quad (5.5)$$

$$\bar{x} = 2,54mm$$

A variável aleatória da espessura final da peça **Esp** será então modelada por meio de uma distribuição normal, cujo valor médio e desvio-padrão serão respectivamente 2,54mm e 0,0108mm como representado na Figura 5-19.

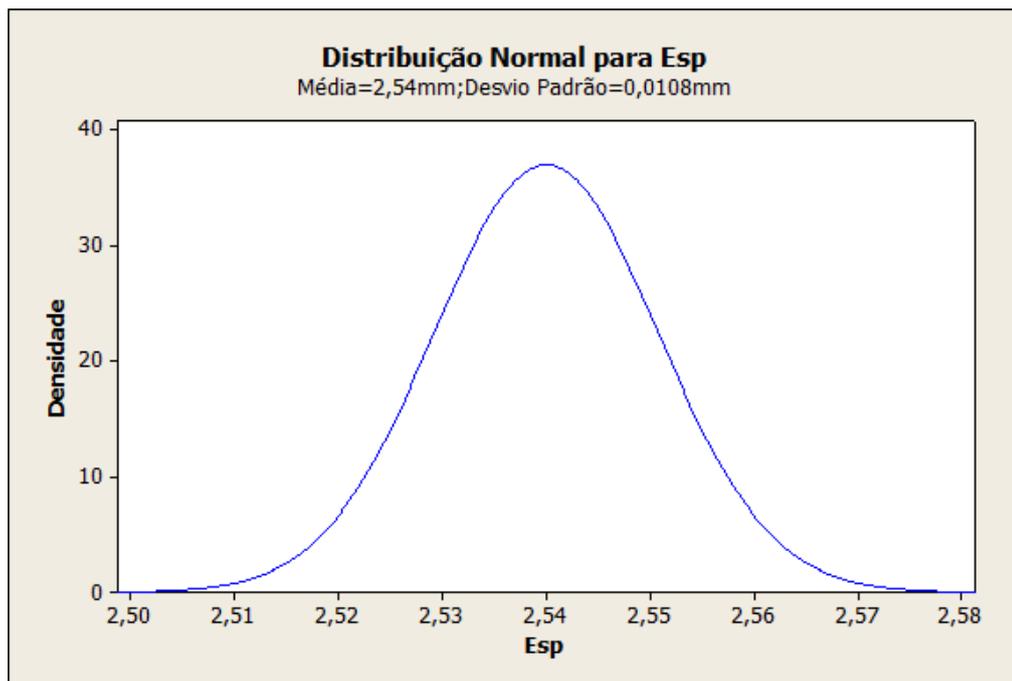


Figura 5-19: Proposta de distribuição normal para variável **Esp**.

Sobre a variável aleatória da carga vertical **Pista**, apesar da recomendação da JCSS (2001) em modelar a carga de choque como uma distribuição Gamma, não foi possível encontrar informações suficientes para tal modelagem. Foi decidido então modelar a variável com uma distribuição normal, com  $P_p = P_{pk} = 1$  e limites inferior e superior de engenharia iguais a -1813,0N e 2453,0N respectivamente.

Usando a equação (5.2), tem-se que

$$Pp = \frac{LSE - LIE}{6S_x} \Rightarrow S_x = \frac{LSE - LIE}{6Pp} = \frac{2453 - (-1813)}{6 \cdot 1} \quad (5.6)$$

$$S_x = 711,0N$$

Usando a equação (5.3), tem-se que

$$Ppk = \text{mínimo}\left(\frac{\bar{x} - LIE}{3S_x}; \frac{LSE - \bar{x}}{3S_x}\right) = \text{mínimo}(1;1) \Leftrightarrow 1 = \frac{\bar{x} - LIE}{3S_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 1 \cdot 3 \cdot 711 + LIE = 2133 + (-1813) = 320,0N$$

A variável aleatória da carga vertical **Pista** será então modelada por meio de uma distribuição Normal cujo valor médio e desvio-padrão serão respectivamente 320MPa e 711,0MPa, como representado na.Figura 5-20.

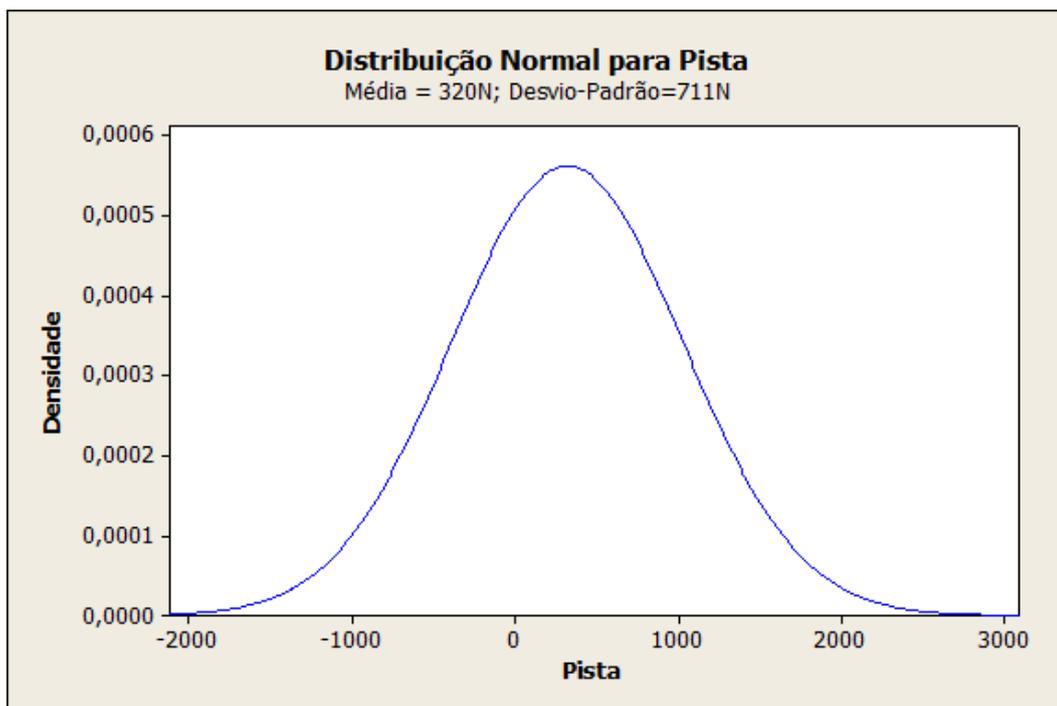


Figura 5-20: Proposta de distribuição Normal para variável **Pista**.

Tais valores são então inseridos no *Encore*© (Tabela 5-6), para a geração dos pontos de experimentos por meio do método de hipercubo latino.

Fatores	Descrição	Distribuição	Mínimo	Máximo	Média	Desvio-Padrão
Peso	Peso do veículo (N)	Uniforme	2917,0	3983,0		
Pista	Carga aplicada do <i>pot hole</i> (N)	Normal			320,0	711,0
Esp	Espessura do <i>top mount</i> (mm)	Normal			2,5	0,0108
<b>Resposta</b>	<b>Descrição</b>					
VM	Tensão de Von-Misses (MPa)					

Tabela 5-6: Entrada de Fatores e Respostas no *Encore*©;

A Figura 5-21 representa os pontos de experimentos gerados pelo método de hipercubo latino.

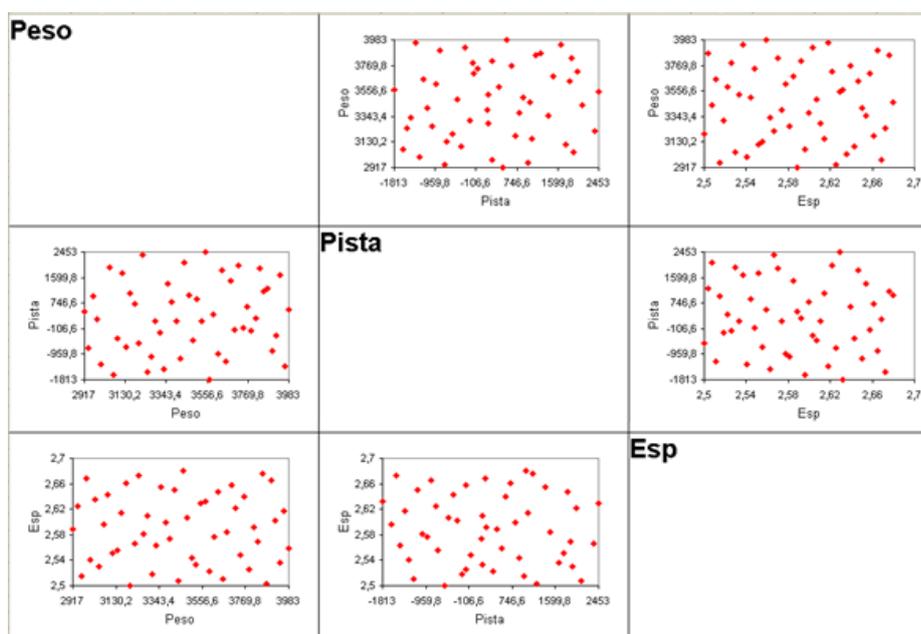


Figura 5-21: Pontos de experimentos por Hipercubo Latino

Com a geração dos pontos de experimento, gera-se uma nova matriz de experimentação e determinam-se as respostas **VM** equivalentes (vide Tabela 5-7).

Corrida	Peso	Pista	Esp	VM	Corrida	Peso	Pista	Esp	VM
1	3417,367	-1116,510	2,651	189,684	26	3091,041	-420,020	2,643	221,344
2	3373,857	798,837	2,599	355,881	27	3634,918	1843,571	2,647	452,820
3	3482,633	-507,082	2,607	252,440	28	3069,286	-1638,878	2,596	122,233
4	3352,102	1408,265	2,654	391,688	29	3569,653	-1813,000	2,632	146,613
5	3460,878	1023,469	2,680	362,849	30	3156,306	1060,020	2,614	356,077
6	3308,592	-245,898	2,518	275,810	31	3743,694	-68,120	2,548	324,337
7	3787,204	-172,594	2,526	323,744	32	3939,490	1669,449	2,537	498,631
8	2917,000	450,592	2,588	289,299	33	2982,265	219,182	2,669	260,876
9	2938,755	-768,265	2,625	181,984	34	3439,122	2104,755	2,507	502,946
10	3808,959	227,888	2,592	345,874	35	3895,980	-855,327	2,665	248,412
11	3613,163	-942,388	2,577	231,139	36	3700,184	-158,837	2,658	290,627
12	3656,673	-1203,571	2,511	212,300	37	3874,224	1234,143	2,504	464,390
13	3221,571	2365,939	2,566	487,127	38	3330,347	-1464,755	2,562	163,081
14	3765,449	624,714	2,640	364,517	39	3591,408	363,531	2,522	355,191
15	3721,939	2017,694	2,621	482,498	40	3004,020	-1290,633	2,540	152,010
16	3983,000	537,653	2,559	395,970	41	3025,776	2764,694	2,636	482,031
17	3178,061	711,776	2,662	318,402	42	3852,469	1147,082	2,676	405,573
18	3134,551	-717,755	2,555	212,259	43	3526,143	152,857	2,533	327,949
19	3265,082	-1029,449	2,581	192,965	44	3678,429	1495,327	2,584	445,676
20	3395,612	132,120	2,573	306,119	45	3047,531	1930,633	2,529	444,963
21	3547,898	2453,000	2,629	501,830	46	3112,796	1756,510	2,551	428,807
22	3961,245	-1377,694	2,618	217,615	47	3830,714	1894,082	2,570	497,764
23	3199,816	-594,143	2,500	237,529	48	3504,388	885,898	2,544	388,449
24	3917,735	-332,959	2,603	304,933	49	3243,327	-1551,816	2,673	137,481
25	3286,837	158,239	2,610	291,708	50	2960,510	972,959	2,515	354,954

Tabela 5-7: Matriz de experimentação para fatores **Peso**, **Esp**, **Pista** e resposta **VM**

Utilizando os dados calculados para **VM**, pode-se gerar uma curva de distribuição de frequência e quadro de resumo estatístico (Figura 5-22). O teste de normalidade (valor  $P > 0,05$ ) confirma que a distribuição de **VM** segue uma curva normal.

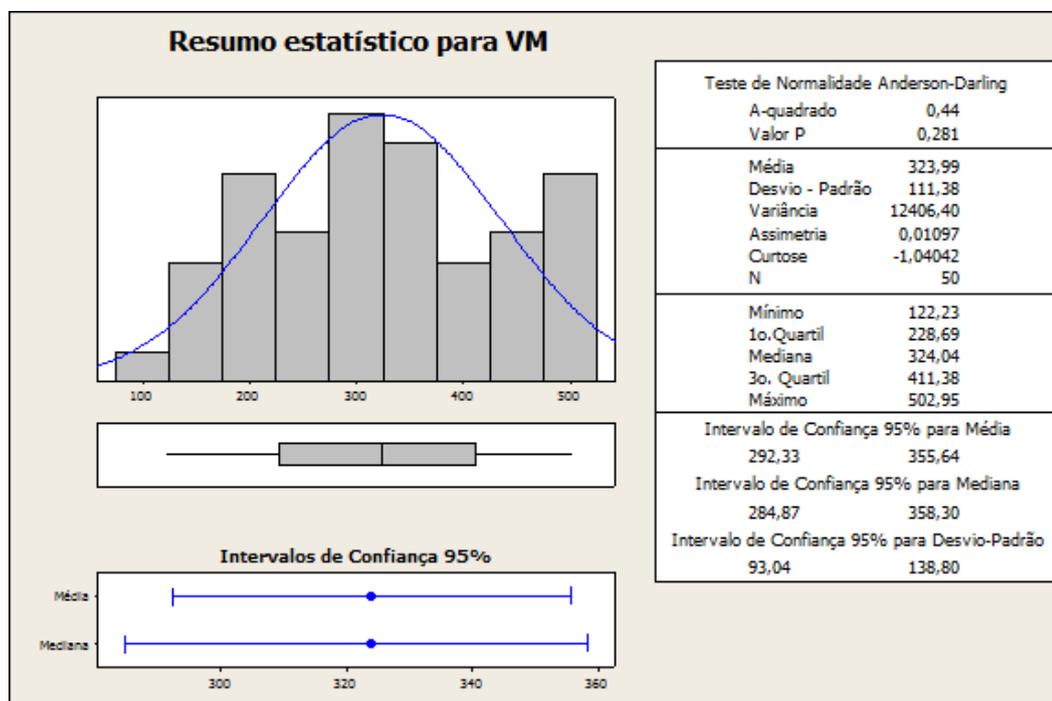


Figura 5-22: Distribuição de frequência e quadro de resumo estatístico para VM

## 5.6. Análise da superfície de resposta MARS e Definição da função distribuição de probabilidade conjunta.

Utilizando os dados calculados para **VM**, utiliza-se o método MARS para determinar uma função superfície de resposta MARS1\_VM, relacionada aos fatores **Peso**, **Pista** e **Esp** e suas interações.

$$\begin{aligned}
 \text{MARS1\_VM} = & 102.4607921589299 \\
 & + 0.09020505081000045 * (\text{Pista} + 1812.9999999999998) \\
 & + 0.09081375551685406 * (\text{Peso} - 2917.0) \\
 & - 0.0364338250930679 * (\text{Esp} - 2.5) * (\text{Pista} + 1812.9999999999998) \\
 & - 132.4636623791109 * (\text{Esp} - 2.5) \\
 & - 0.05556298613996002 * (\text{Esp} - 2.5) * (\text{Peso} - 2917.0) \\
 & - 3.574026945603481\text{E-}4 * (2.56244897959184 - \text{Esp}) * (-68.12040816326527 - \text{Pista}) * (\text{Peso} - 2917.0) \\
 & - 8.10776767394314 * (\text{Esp} - 2.5734693877551) \\
 & + 0.0170918731164863 * (885.897959183673 - \text{Pista}) * (2.5734693877551 - \text{Esp}) \\
 & + 18.924768667018807 * (\text{Esp} - 2.53673469387755) \\
 & - 0.019932370654900625 * (\text{Pista} - 1147.08163265306) * (\text{Esp} - 2.53673469387755) \\
 & + 0.020730735502975044 * (1147.08163265306 - \text{Pista}) * (\text{Esp} - 2.53673469387755) \\
 & + 0.0067530436667347146 * (\text{Esp} - 2.63591836734694) * (\text{Pista} + 1812.9999999999998) \\
 & + 5.688329771343372\text{E-}5 * (2.56244897959184 - \text{Esp}) * (219.181632653061 - \text{Pista}) * (\text{Peso} - 2917.0) \\
 & + 0.012967562120311695 * (\text{Pista} + 68.12040816326527) * (2.5734693877551 - \text{Esp})
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

A Figura 5-23 mostra os quatro testes de análise de resíduos da superfície de resposta MARS1\_VM aos resíduos de **VM**:

- Verificação de normalidade - mostra os pontos formando aproximadamente uma linha reta e inclinada, confirmando a hipótese da normalidade dos resíduos;
- Histograma de resíduos - mostra que a frequência dos resíduos forma aproximadamente uma curva em forma de sino, com centro em zero, confirmando a hipótese da normalidade dos resíduos;
- Ordem de observação x Resíduos - mostra que não existe uma tendência de previsibilidade dos resíduos (causas especiais), confirmando a hipótese de que os resíduos estão estatisticamente controlados;
- Ajustes x Resíduos - mostra que os resíduos estão dispersos aleatoriamente em torno do zero, confirmando a hipótese de que os resíduos não variam linearmente (ou de outro tipo) em relação aos valores ajustados.

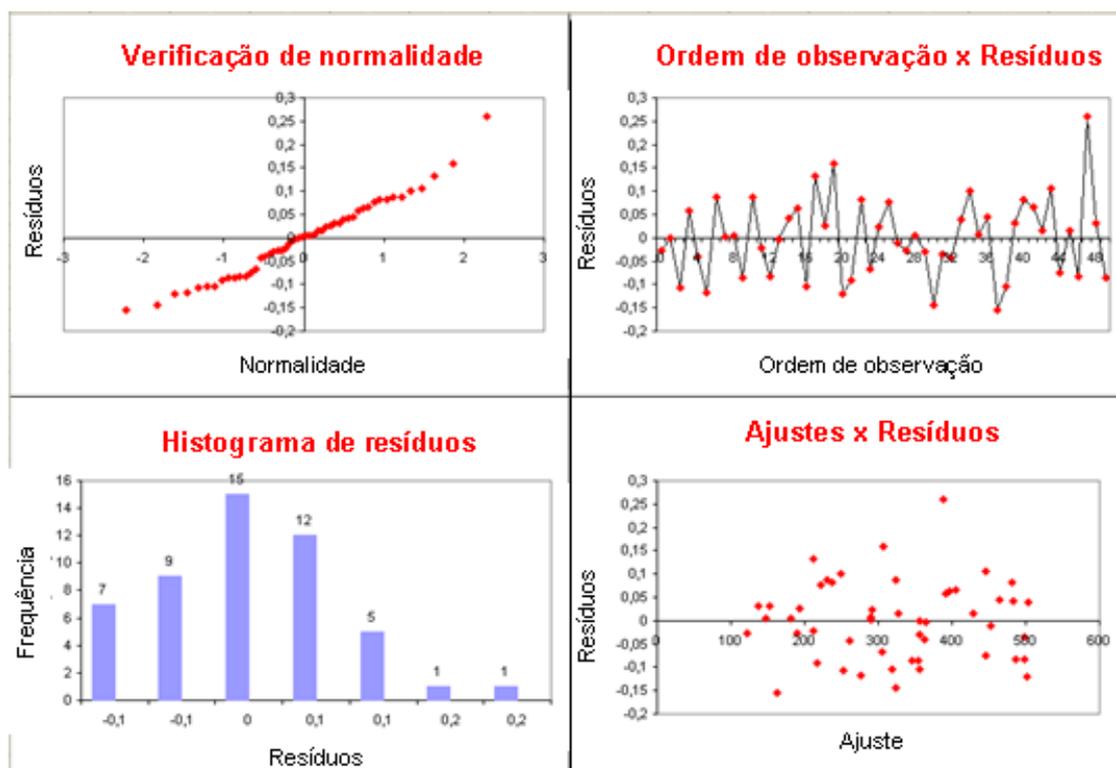


Figura 5-23: Análise de resíduos da superfície de resposta MARS1\_VM

Dessa forma, pode-se concluir que a equação (5.8) é adequada para representar o experimento e pode ser utilizada para modelar a função distribuição das variáveis de carregamento, na determinação do estado - limite.

### 5.7. Determinação da função estado - limite e seleção do índice de confiabilidade desejado

Conforme o escopo do trabalho, o componente estrutural automotivo *Top mount* deve ser dimensionado de modo a ter o escoamento como principal mecanismo de falha. Após tal limite, o componente sofrerá deformação plástica e perderá sua função, pondo em risco moderado a segurança dos usuários do veículo.

Assim, usando a equação (3.54) e considerando a hipótese mínima e desejável para o fator de segurança ( $FS = 1$ ), pode-se determinar a equação da capacidade  $Q(\mathbf{X})$

$$FS = \frac{YS}{Q(\mathbf{X})} = 1 \Rightarrow Q(\mathbf{X}) = YS \quad (5.9)$$

A equação do carregamento  $S(\mathbf{X})$  pode ser determinada como sendo

$$S(\mathbf{X}) = MARS1\_VM \quad (5.10)$$

Usando a equação (3.3), determina-se a função estado - limite

$$G(\mathbf{X}) = Q(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}) = YS - MARS1\_VM \quad (5.11)$$

sendo sua condição de falha

$$G(\mathbf{X}) < 0 \quad (5.12)$$

Quanto ao índice de confiabilidade desejada, será utilizado o valor recomendado pela JCSS (2001) para uma consequência moderada de falha com custo relativo normal de medida de segurança, como visto na seção 3.9.

$$\beta = 4,2 \quad (P_F \approx 10^{-5}) \quad (5.13)$$

Sobre a variável aleatória do limite de escoamento  $YS$ , visto que não foi possível localizar uma carta de controle estatístico do limite de escoamento para o aço DP-980 com 2,5mm, foi decidido usar uma carta-exemplo do aço DP-600 com 1,2mm (vide Figura 5-24) como referência, visto que ambos os materiais são feitos pelo mesmo fabricante e, supõe-se, nas mesmas condições de fabricação (fonte de matéria-prima, processo de fundição do ferro-gusa e processo de laminação do aço).

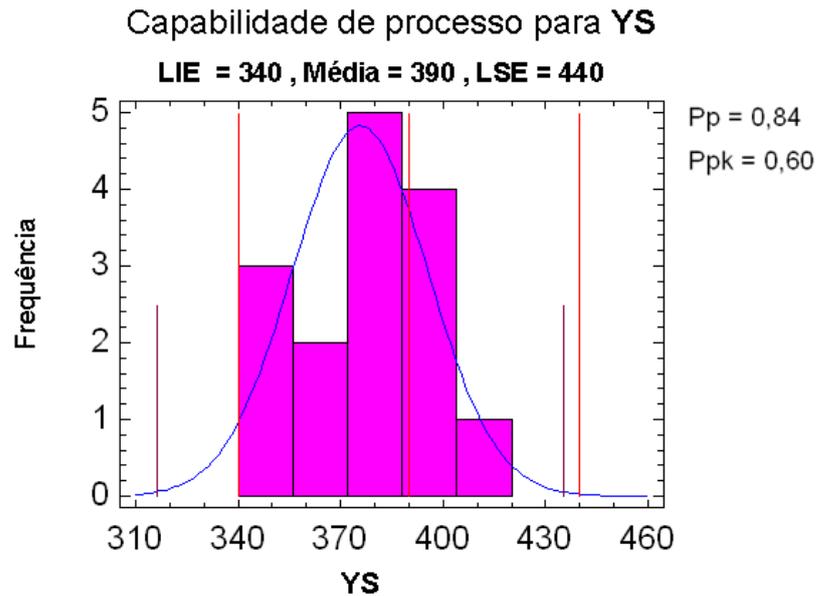


Figura 5-24: Exemplo de estudo de capacidade para limite de escoamento do aço DP-600 (Cortesia da Arcelor-Mittal)

Usando a equação (5.2), tem-se que

$$P_p = \frac{\text{Tolerância}}{6S_x} = \frac{LSE - LIE}{6S_x} \Rightarrow S_x = \frac{LSE - LIE}{6P_p} = \frac{750 - 600}{6 \cdot 0,84} = 29,76 \text{MPa} \quad (5.14)$$

Usando a equação (5.3), tem-se que

$$P_{pk} = \text{mínimo}\left(\frac{\bar{x} - LIE}{3S_x}; \frac{LSE - \bar{x}}{3S_x}\right) = \text{mínimo}(0,6; 1,08) \Leftrightarrow 0,6 = \frac{\bar{x} - LIE}{3S_x} \Rightarrow \quad (5.15)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0,6 \cdot 3 \cdot S_x + LIE = 1,31 \cdot 3 \cdot 29,76 + 600 = 653,56 \text{MPa}$$

Entende-se também pelos índices de capacidade  $P_p$  e  $P_{pk}$  menores que um que o processo não pode ser modelado com uma distribuição Normal. Será então considerado que YS segue uma distribuição lognormal. Logo,

$$\varphi = \log(S_x) = \log(29,76) = 1,47 \quad (5.16)$$

$$\zeta = \log(\bar{x}) = \log(653,56) = 2,81 \quad (5.17)$$

A variável aleatória do limite de escoamento **YS** será modelada então por meio de uma distribuição lognormal, cujos valores de parâmetros serão  $\varphi = 1,47$ ,  $\zeta = 2,81$ , e  $\theta = 600$ , como representado na Figura 5-25.

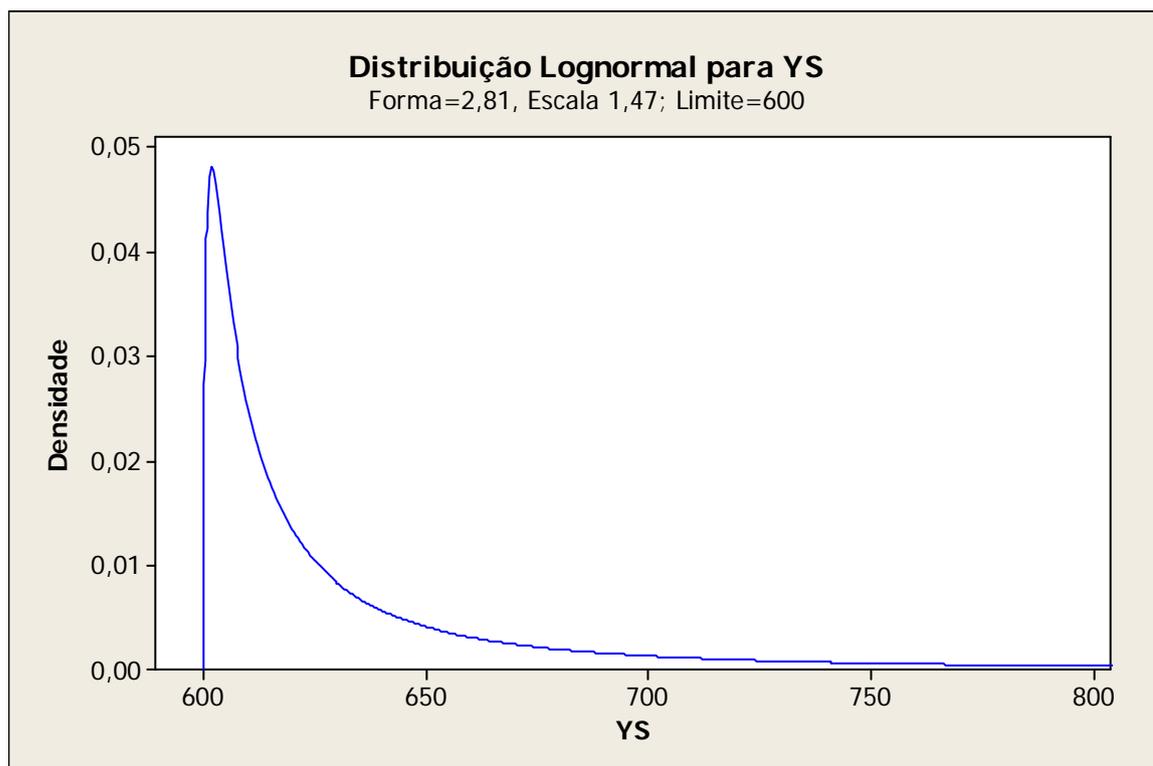


Figura 5-25: Proposta de distribuição Lognormal para variável **YS**.

## 5.8. Simulação da confiabilidade

Para determinar a confiabilidade do componente é necessário identificar o método de predição de confiabilidade a ser utilizado. Para tanto, deve-se utilizar o sub - processo “Simulação da confiabilidade”. Tal sub - processo utiliza algumas questões específicas para selecionar o método adequado:

- A função do estado – limite é linear? Não;
- Todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema seguem uma distribuição normal? Não;

Seleciona-se então o Método de Monte Carlo Simples como método de predição de confiabilidade. Foi utilizado como critério de parada um erro da probabilidade de falha de  $10^{-4}$ .

Para calcular a confiabilidade do componente estrutural pelo método de Monte Carlo Simples foi utilizado o programa computacional *Encore*© 5.0 para gerar um total de 10.000 simulações.

## 5.9. Conclusão do experimento

Para uma confiabilidade de 99,9989%, o componente estará situado em uma condição segura, com  $G(X) = 106,756MPa$  (Figura 5-26.a), sendo  $\overline{YS} = 653,56MPa$ .

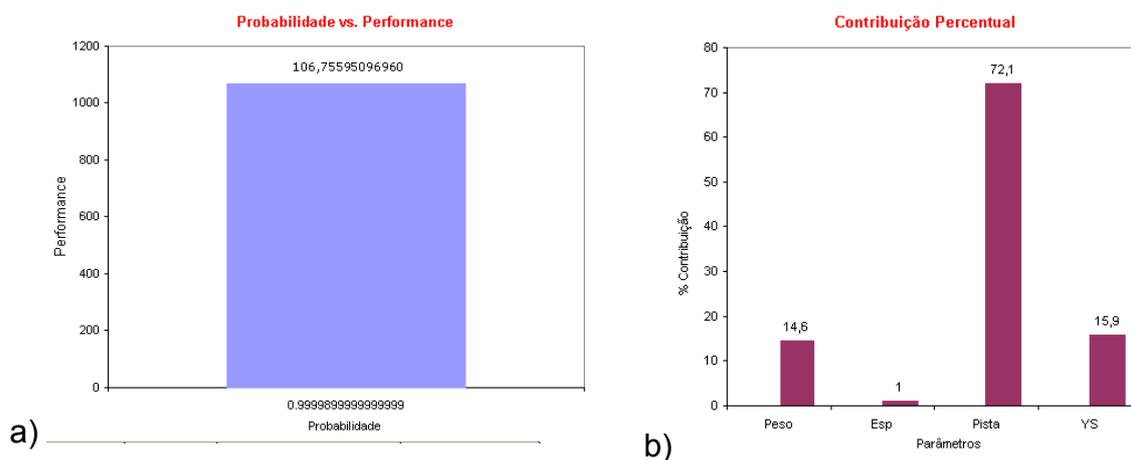


Figura 5-26: a) Valor de  $G(X)$  para confiabilidade (probabilidade) de 99,999%; b) Contribuição percentual de cada variável aleatória na determinação de  $G(X)$ ;

O *Encore*® gera ainda as curvas de densidade de probabilidade (Figura 5-27.a) e distribuição cumulativa (Figura 5-27.b) de  $G(X)$ .

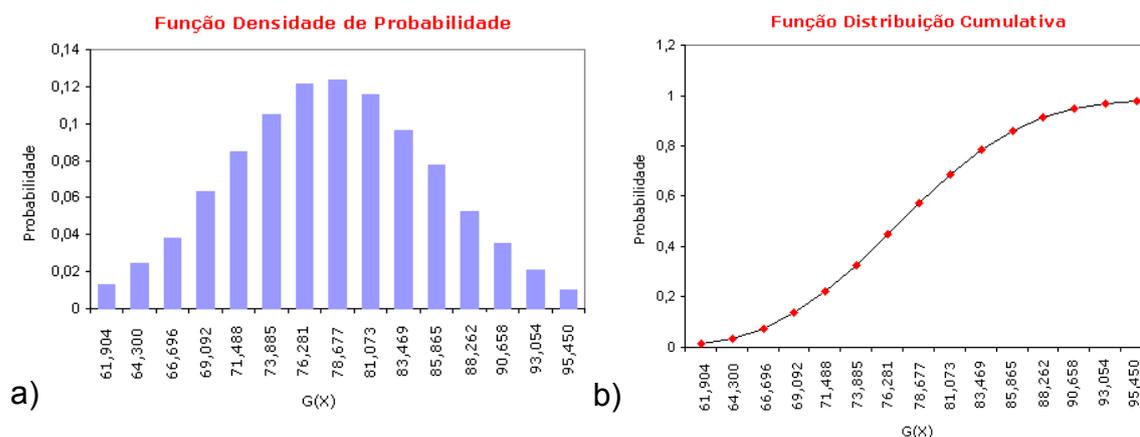


Figura 5-27: a) Curva de densidade de probabilidade para  $G(X)$ ; b) Curva de distribuição cumulativa para  $G(X)$ ;

É possível determinar o fator de segurança do componente por meio de (3.54) como sendo

$$FS = \frac{Tensão_{adm}}{Tensão_{aplicada}} = \frac{\overline{YS}}{\overline{YS} - G(X)} = \frac{653,56}{653,56 - 106,756} = 1,1952 \quad (5.18)$$

Conclui-se então que o componente está superdimensionado em aproximadamente 20% para uma confiabilidade de 99,9989%.

A Figura 5-26.b mostra a contribuição de cada variável para o cálculo de  $G(X)$ . Tal informação é importante para se priorizar as variáveis que podem ser trabalhadas para aproximar o fator de segurança para um. Aplicar-se-ia então a seguinte estratégia:

1. Troca do sistema de suspensão do veículo por outro menos eficiente (e mais barato) em absorver a carga **Pista**;
2. Alteração do material utilizado por outro com menor **YS**;
3. Aumento do **Peso** do veículo, aumentando o limite de carga útil ou volume de combustível admissível, por exemplo;
4. Diminuição da espessura **Esp** do material (ou aumento da tolerância de fabricação do componente).

Vale ressaltar que a escolha da ação (ões) mais apropriada (s) deve levar em conta também a própria estratégia de colocação do veículo no mercado. A troca do sistema de suspensão, por exemplo, acarretaria perda de dirigibilidade<sup>10</sup> e conseqüente prejuízo da satisfação do consumidor.

---

<sup>10</sup> Tradução de *Driveability*, atributo relacionado a facilidade em dirigir um veículo;

## 6. CONCLUSÃO

O presente trabalho de dissertação permitiu a elaboração de algumas conclusões. A primeira delas diz respeito ao processo proposto. Apesar de longo, o processo é de simples utilização, servindo tanto como processo de trabalho como sequência de treinamento para engenheiros do setor automotivo. No entanto a existência de uma estrutura de decisões no sub - processo “Simulação da confiabilidade” pode conduzir a uma seleção errada do método de predição de confiabilidade, caso o engenheiro não tenha uma formação em estatística mais sólida. Neste caso, recomenda-se a utilização do Método de Monte Carlo simples, associado a técnica de redução de amostragem Hipercubo Latino e ao método MARS de superfície de resposta, como método preferencial de predição de confiabilidade em componentes estruturais automotivos, visto sua capacidade de convergir mesmo quando as variáveis aleatórias envolvidas não seguem uma distribuição normal e/ou a função do estado – limite é não linear. Outra vantagem do Método de Monte Carlo é a possibilidade de usar distribuições de probabilidade não - normais diretamente, sem empregar métodos de padronização de variáveis, como nos métodos FORM e SORM.

No caso de utilização correta da estrutura de decisão do processo proposto, ainda é possível que não se atinja o ponto de convergência desejado, para o erro da probabilidade de falha, devido ao custo computacional para a realização do experimento. Isto pode ocorrer tanto pelo número elevado de variáveis aleatórias envolvidas como pelo número e ou complexidade das funções estados - limites utilizadas. Nestes casos, devem-se re-fazer a verificação de tais variáveis e funções com objetivo de reduzi-las a uma quantidade mínima e aceitável para atingir a solução do problema e optar pela utilização do Método FORM para a determinação do ponto de projeto, seguido da utilização do Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância para a determinação da probabilidade de falha.

Uma dificuldade com o processo proposto vem a ser a própria realização das simulações de elementos finitos. Tanto a quantidade de fatores como de níveis podem proporcionar um custo e/ou tempo de realização inaceitáveis. Deve-se levar isto em conta antes mesmo da construção do modelo matemático.

Sobre os métodos FOSM, FORM e SORM, concluiu-se que tais métodos de predição, apesar da possibilidade de não convergência do erro da confiabilidade,

continuam sendo métodos válidos. Os erros de resultados obtidos pelos mesmos podem ser considerados como pequenos, para as situações descritas no processo sugerido e resumidas a seguir

- Função estado – limite linear + Variáveis aleatórias normais → FOSM
- Função estado – limite linear + Variáveis aleatórias não-normais → FORM
- Função estado – limite não-linear + Variáveis aleatórias normais → SORM

Vale ressaltar que o método FORM também pode ser aplicado quando a função do estado – limite é linear e as variáveis aleatórias são normais, e que o método SORM também pode ser aplicado quando a função do estado – limite é linear e as variáveis aleatórias são não-normais. Contudo, a demanda de processamento numérico de tais métodos, para as situações acima, podem ser consideradas como desperdício, já que, em teoria, não se atingiria resultados mais precisos do que pelos métodos sugeridos pelo processo.

Como conclusão final, o processo proposto mostrou-se capaz de identificar o método de predição de confiabilidade mais adequado para resolver problemas de interferência carregamento - capacidade no dimensionamento de um componente estrutural automotivo. O processo foi validado por meio da realização de um experimento numérico onde foi levada em conta a variabilidade dos diversos parâmetros envolvidos no projeto, para uma situação estática e tendo o escoamento como mecanismo de falha. Um aspecto que pode ser desenvolvido no futuro é comprovar a eficiência do processo proposto em outros mecanismos de falha.

### 6.1. Sugestões para trabalhos futuros

Durante a pesquisa desta dissertação, foram identificadas várias linhas de pesquisa na área de confiabilidade estrutural, aplicadas ao ambiente industrial automotivo:

1. Estabelecimento de níveis de desempenho e confiabilidade baseados na minimização de custos (projeto, fabricação, manutenção, depreciação), especialmente para grandes estruturas;
2. Determinação de variáveis aleatórias e suas características estatísticas (modelo de distribuição e parâmetros);

3. Utilização de outros métodos para redução do número de simulações, como Amostragem por Importância Adaptativa, Redes Neurais e Algoritmo Genético;
4. Utilização de outros métodos de regressão para determinação de funções estados – limites, como expansão polinomial de primeiro e segundo grau;
5. Geração de modelos mecânicos mais complexos, capazes de representar adequadamente o comportamento dos materiais;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

\_\_\_\_\_. **CÍRCULO DE MOHR PARA ESTADO PLANO DE TENSÕES**. Disponível em <https://web.tecgraf.puc-rio.br/etools/mohr>. Acessado em 27 de novembro de 2010;

ARCELOR-MITTAL AUTOMOTIVE COMMUNICATIONS. **Automotive worldwide: Product offer for Europe – 2008 edition**. 2008, Luxembourg, 133p.;

AGRAWAL, H., JUNEJA, L., SUDJIANTO, A. **High Mileage Reliability/Robustness Using Fatigue/Durability CAE**. Dearborn: Ford Motor Company, 1997, 17p.;

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. Editora Érica, 2007, 292p.;

ARGYRIS, J.H. **Energy theorems and structural analysis**. Aircraft Engineering, vol. 26, November, pp. 347-394, 1954;

BECK, A. **Computer-aided teaching of structural reliability**. In: CMNE/CILAMCE 2007, 13 a 15 de junho de 2007, APMTAC, Portugal, 2007, 12p.;

BECK, A. **Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos**. Dissertação (Mestrado), Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999, 188p.;

BECK, A. MELCHERS, R. **Barrier failure dominance in time variant reliability analysis**. Probabilistic Engineering Mechanics, vol 20, pp.79–85, 2005;

CHARUMAS, B. **A new technique for structural reliability analysis**. Dissertação (Mestrado). Mississippi: Mississippi State University, 2008, 143p.;

CLOUGH, R.W. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, 1960;

CORNEL, A.C. **A probabilistic-based structural code**. American Concrete Institute Journal, Vol 66, December, pp. 974-985, 1969;

COURANT, R. **Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration**. Bulletin of American Mathematician Society, Vol. 49, pp 2165-2187, 1943;

DENG, J., GU, D., LI, X., Y, Z.Q. **Structural reliability analysis for implicit performance functions using artificial neural network**. Journal of Structural Safety, Vol. 27, March, pp 25-48, 2005;

DHILLON, B.S. **Design Reliability: Fundamentals and Applications**. 1.ed. Florida: CRC Press LLC, 1999, 397 p.;

FIALHO, A.B. **Cosmos: Plataforma CAE do Solidworks**. Editora Érica, 2008, 352p. ;

FIESSLER, B., NEUMANN, H.J., RACKWITZ, R. **Quadratic Limit States In Structure Reliability**. ASCE J Eng Mech Div, Vol. 105, No. 4, August, pp.661-676, 1979;

FORD MOTOR COMPANY. **Controle estatístico do processo fundamental**. Dearborn, 1995, 167p.;

FRIEDMAN, J. **Multivariate Adaptative Regression Splines**. The Annals of Statistics, Vol. 19, No. 01, pp. 01-141, 1990;

FRIEDMAN, J., BREIMAN, L., OLSHEN, R., STONE, C. **Classification and regression tress**. Wadsworth, Belmont, California, 1984;

GRAY, W. A. **Modifications to the directional simulation in the load space approach to structural reliability analysis**. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 21, No. 2, pp. 148-158, 2006;

HARBITZ, A. **An efficient sampling method for probability of failure calculation**. Journal of Structural Safety, Vol. 3, January, pp. 109-115, 1986;

HASOFER, A.M., LIND, N. **An exact and invariant first-order reliability format**. Journal of Engineering Mechanic, Vol. 100, No. 01, pp.111-121,1974;

HENNIKOFF, H. **Solutions of Problems in Elasticity by the Framework Method**. Journal of Applied Mechanics, A , pp. 169-175, 1941;

HOUGAZ, A. B. **Análise probabilística de durabilidade aplicada a veículos de carga rodoviária**. Tese (Doutorado). São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005, 118p.;

JCSS - JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **Probabilistic Model Code**. 12th. Draft, 2001. Disponível em <http://www.jcss.ethz.ch/>. Acesso em: 13 Jan 2009, 172p.;

KECECIOGLU, D. **Keynote address: robust engineering design-by-reliability**. 2003 SAE World Congress, Vol.01, No. 0141, Detroit, 2003, 18p.;

KECECIOGLU, D., WEI, Z.**A new robust design methodology to improve the reliability of structural beams**. 2005 SAE World Congress, Vol.01, No. 0816, Detroit, 2005, 12p.;

LENTH, R.V. **Quick and easy analysis of unrepliated fatorials**. Technometrics, No.31, pp.469-473, 1989;

LIJIE, C., DAICHAO, S. **Genetic algorithms in probabilistic finite element analysis of geotechnical problems**. Computers and Geotechnics No.32, Janeiro, pp. 555-563, 2005;

MCKAY, M.D., CONOVER, W.J., BECKMAN, R.J. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a Computer code**. Technometrics, Vol. 21, No. 2, May, pp. 239-245, 1979;

MADSSSEN, HO. **Omission sensitivity factors**. Structural safety, vol. 05, No. 01, Janeiro, pp.34-45 , 1988;

MAYER, M. **Die sicherheit der Bauwerke**. Springer - Verlag, Berlin, 1926;

MELCHERS, R.S. **Reliability of parallel structural systems**. Journal of structural engineering, ASCE, Vol.109, No. 11, Novembro, pp. 2651-2665, 1983;

MELCHERS, R.S. **Structural reliability: analysis and prediction**. 2ed.,New York: John Wiley, pp., 1999;

METROPOLIS, N. **The beginning of the Monte Carlo Method**. Los Alamos Science, Edição especial dedicada a Stanislaw Ulam, pp. 125-130, Los Alamos, 1987;

NELSON, L. **The shewhart control chart – tests for special causes**. Journal of Quality Technology, ASQC, Vol. 16, No. 4, Outubro, pp. 237-239, 1984;

NIKOLAIDIS, E., GHIOCEL, D., SINGHAL, S. **Engineering Design Reliability Handbook**. 1. ed., CRC press LLC, Boca Raton, 2005, 1192p.;

NOGUEIRA, C. G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicada as estruturas de barras de concreto armado**. Dissertação (Mestrado), São Carlos: Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, 2005, 166p.;

PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. **Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing**. New York: Cambridge University Press, 1992, 1018p.;

RACKWITZ, R., FIESSLER, B. **Structural reliability under combined random load sequence**. Computers and Structures, Vol. 09., No.05., Novembro, pp.489-494, 1978;

RACKWITZ R. **Reliability analysis a review and some perspectives**. Structural Safety, No.23, pp 365-395, 2001;

ROSA, E. **Fadiga e Confiabilidade**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, notas de aula, edição da Internert, 1994, 384p. Disponível em [http://geocities.yahoo.com.br/projetos\\_ctm/](http://geocities.yahoo.com.br/projetos_ctm/). Acessado em 10 de fevereiro de 2008;

ROSOWSKY, D.V. **Structural Reliability - Structural Engineering Handbook**. CRC Press LLC, Boca Raton, 1999, pp.1473-1512;

SHIGLEY, J. **Elementos de máquinas**. 3a.ed., Editora Livros Técnicos e Científicos SA, 1981, 350p.;

SOARES, R.C. **Um método sobre modelos mecânicos-probabilísticos para pórticos de concreto armado**. Tese (Doutorado), São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002, 269p.;

SPIEGEL, M. **Probabilidade e estatística**. 1.ed.São Paulo: Pearson Education do Brasil Ltda, 1978, 522p.;

TURNER, M.J., CLOUGH, R.W., MARTIN, H.L., TOPP, L.J. **Stiffness and deflection analysis of complex structures.** Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No.09, September, pp.805-823, 1956;

VERZENHASSI, C. C. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade.** Dissertação (Mestrado), São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008, 154p.;

WIERZBICKI, W. **Safety of structures as a probabilistic problem (technical review).** Przegląd Techniczny, Warsaw, 1936;

YOUN, B.D., CHOI, K.K., GU, L. **Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact.** Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 26, No. 3-4, pp. 272-283, 2004;

ZHOU, J., NOWAK, S. **Integration formulas to evaluate functions of random variables.** Journal of Structural Safety, Vol. 5, No. 4, December, pp. 267-284, 1988;

## APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Um princípio fundamental na engenharia e na própria ciência é o princípio da repetição de experimentos: ***Toda vez que um experimento for repetido, sob as mesmas condições, deve-se obter o mesmo resultado.*** No entanto, existem experimentos que, mesmo sob as mesmas condições, não geram sempre o mesmo resultado. Tais experimentos são chamados de *experimentos aleatórios*. É o caso do lançamento de um dado, por exemplo.

Os experimentos aleatórios são comumente modelados estatisticamente. Este apêndice introduz alguns conceitos de probabilidade, estatística e confiabilidade que estão diretamente relacionados com este trabalho.

### A.1 Espaços amostrais e variáveis aleatórias

Ao conjunto  $\Omega$  de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório chama-se de *espaço amostral*, sendo cada elemento do conjunto chamado de *ponto amostral*. A um subconjunto **A** do espaço amostral onde constam todos os resultados desejados é denominado *evento*.

Segundo Spiegel (1978), se um espaço amostral tem um número finito de pontos, é chamado de *espaço amostral finito*. Se um espaço amostral finito tem tantos pontos quanto os números naturais, chama-se de *espaço amostral infinito numerável*. Se tiver tantos pontos quanto um determinado segmento de um eixo  $\overline{ox}$ , tal como  $0 \leq X \leq 1$ , chama-se *espaço amostral infinito não-numerável*. Um espaço amostral infinito numerável é chamado de *espaço discreto*, enquanto que um espaço amostral infinito não-numerável é um *espaço contínuo*.

Atribuindo um número a cada ponto amostral, tem-se uma *função aleatória definida em espaço amostral*, representada por meio de uma letra maiúscula X,Y,Z enquanto que seus valores são representados pelas letras minúsculas  $x,y,z$ . Uma variável aleatória que toma um número infinito numerável de valores é chamada *variável discreta*, ao passo que uma variável aleatória que toma um número infinito não-numerável de valores é chamada de *variável contínua*.

## A.2 Definições de Probabilidade

A incerteza do resultado de um experimento aleatório leva-se a medir a probabilidade de um evento, ou seja, a chance de obter determinado resultado. A probabilidade de um evento pode ser definida por meio de dois processos diferentes:

- *Processo clássico* - se um evento pode ocorrer de  $h$  maneiras diferentes, em um total de  $n$  maneiras possíveis, sendo todas igualmente prováveis, então a probabilidade do evento é  $h/n$ .
- *Processo da frequência* - se após  $n$  repetições de um experimento, observa-se  $h$  ocorrências de um determinado evento, então a probabilidade do evento é  $h/n$ .

Quando, em todos os experimentos realizados, observa-se o mesmo evento, então a razão  $h/n$  equivalerá a 1, ao passo que, quando em qualquer experimento realizado não se observa o evento, então a razão  $h/n$  equivalerá a zero. Por isso, a probabilidade de ocorrência de um evento **A**, ou seja,  $P(\mathbf{A})$  deve estar entre zero e um ( $0 \leq P(\mathbf{A}) \leq 1$ ).

## A.3 Distribuição de probabilidade contínua

Se  $X$  é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de  $X$  ser um determinado valor é igual a zero. No entanto, a probabilidade de  $X$  estar entre dois valores diferentes,  $a$  e  $b$ , é diferente de zero. Definem-se então as seguintes funções:

*Função distribuição de probabilidade contínua*,  $f(x)$  (ou função de densidade de probabilidade), tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{A.1})$$

com

$$f(x) \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (\text{A.3})$$

Função de distribuição cumulativa contínua,  $F(x)$ , tal que

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du \quad (\text{A.4})$$

#### A.4 Definição de esperança matemática

Seja  $X \in \mathbb{R}$  uma variável aleatória discreta e  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , os valores que ela pode assumir, sendo  $P(X = x_i) = f(x_i)$  a probabilidade de ocorrência do evento  $X = x_i$ , tem-se então:

Esperança de  $X$ ,  $E(x)$ , tal que

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + \dots + x_nP(X = x_n) = x_1f(x_1) + \dots + x_nf(x_n) = \sum_{i=1}^n x_if(x_i) \quad (\text{A.5})$$

Quando as probabilidades  $f(x_i)$  são todas iguais, tem-se que

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{A.6})$$

Para uma variável aleatória contínua, com densidade  $f(x)$ , define-se a esperança como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (\text{A.7})$$

A esperança de  $X$  é também chamada de *média* de  $X$ , denotando seu valor  $\bar{x}$ .

#### A.5 Variância e desvio-padrão

Seja  $X \in \mathbb{R}$  uma variável aleatória discreta e  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , os valores que ela pode assumir, sendo  $P(X = x_n) = f(x_n)$  a probabilidade de ocorrência do evento  $X = x_n$ , tem-se então que a *variância* de  $X$  é dada por

$$S_x^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f(x_i) \quad (\text{A.8})$$

Para uma variável aleatória contínua, com densidade  $f(x)$ , define-se a *variância* de  $X$  como sendo

$$S_x^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \quad (\text{A.9})$$

Sendo discreta ou contínua, a raiz quadrada  $S_x$  da variância  $S_x^2$  é chamada de desvio-padrão. Tanto a variância quanto o desvio-padrão são medidas de dispersão dos valores da variável aleatória  $X$  em torno da média  $\bar{x}$ .

#### A.6 Coeficiente de variação

Seja  $X \in \mathbb{R}$  uma variável aleatória, tem-se então o *Coeficiente de variação* de  $X$ ,  $\text{COV}(X)$ , tal que

$$\text{COV}(X) = \frac{S_x}{E(X)} \quad (\text{A.10})$$

#### A.7 Variáveis aleatórias padronizadas

Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\bar{x}$  e desvio-padrão  $s_x$ , definimos o valor  $z$  de sua *padronizada*  $Z$  como sendo

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S_x} \quad (\text{A.11})$$

sendo que

$$E(Z) = 0 \quad S_z = 1 \quad (\text{A.12})$$

Uma observação importante é que  $Z$  é adimensional.

## A.8 Esperança e variância de distribuições conjuntas

As definições acima, relativas a apenas uma variável aleatória  $X$ , podem se estender ao caso de duas ou mais variáveis aleatórias. Sejam  $X$  e  $Y$ , por exemplo, duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta  $f(x, y)$ , as médias de  $X$  e  $Y$  serão

$$\bar{x} = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{y} = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy \quad (\text{A.14})$$

e as variâncias serão

$$S_X^2 = E[(X - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x, y) dx dy \quad (\text{A.15})$$

$$S_Y^2 = E[(Y - \bar{y})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})^2 f(x, y) dx dy \quad (\text{A.16})$$

## A.9 Covariância

Sejam  $X$  e  $Y$ , duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta  $f(x, y)$ , a covariância é definida por

$$S_{XY} = E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f(x, y) dx dy \quad (\text{A.17})$$

## A.10 Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação é uma medida da dependência entre si das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  dada por

$$\rho_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (\text{A.18})$$

Observa-se que, se  $\rho_{XY} = 0$ , diz-se que as variáveis X e Y são *não-correlacionadas*, porém elas podem ou não ser independentes.

### A.11 Distribuição Uniforme

Seja X uma variável aleatória contínua, ela será uniformemente distribuída em  $a \leq x \leq b$  se sua função densidade de probabilidade for

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{(caso contrário)} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

A função de distribuição cumulativa é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

e a média e variância são dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(a+b) \quad (\text{A.21})$$

$$S_x^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \quad (\text{A.22})$$

### A.12 Distribuição Normal

Seja X uma variável aleatória contínua, com média  $\bar{x}$  e variância  $s_x^2$ , tem-se então a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\bar{x}}{S_x} \right)^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.23})$$

A função de distribuição cumulativa é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi(x) = \frac{1}{S_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u-\bar{x}}{S_X} \right)^2} du \quad (\text{A.24})$$

Usando o conceito de variável padronizada têm-se as seguintes funções da densidade de probabilidade

$$f(z) = \phi(z) = \frac{1}{S_Z \sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < +\infty \quad (\text{A.25})$$

e da distribuição cumulativa

$$F(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{S_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{S_Z \sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du \quad (\text{A.26})$$

A Figura A-1 exibe o gráfico da função de densidade (A.25), chamada de *curva normal padronizada*.

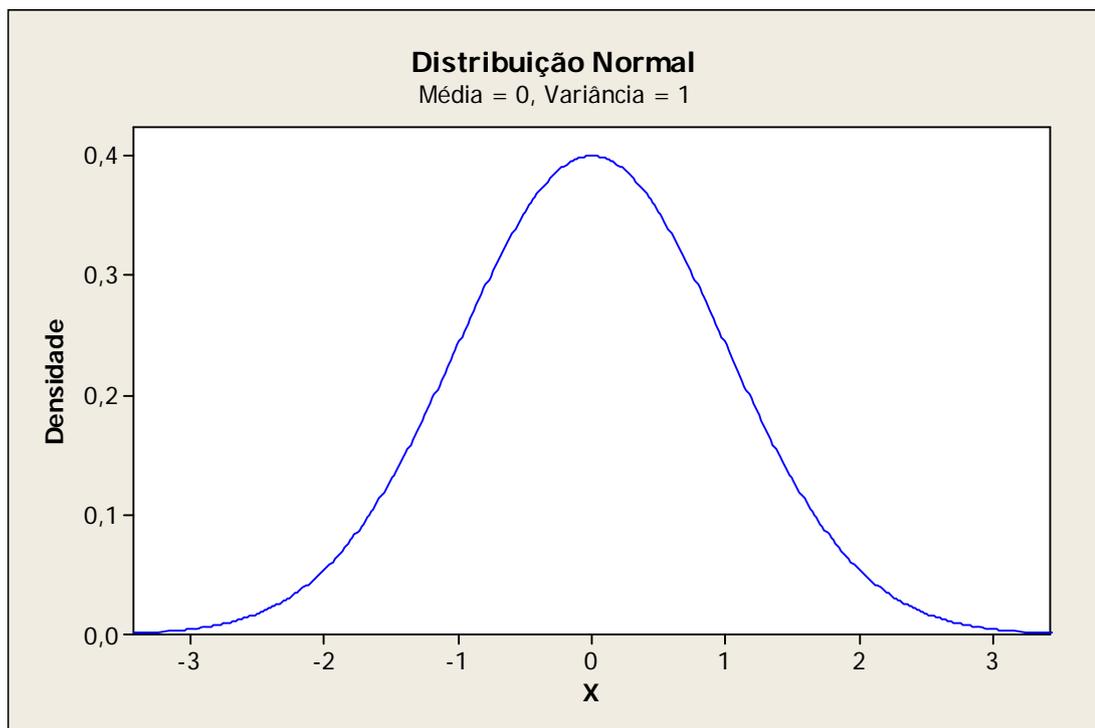


Figura A-1 - Curva normal padronizada.

### A.13 Distribuição Normal Bivariada

Uma generalização da distribuição normal para duas variáveis aleatórias contínuas X e Y é dada pela função de densidade conjunta

$$f(x, y, \rho_{XY}) = \phi_2(x, y, \rho_{XY}) \frac{1}{2\pi S_X S_Y \sqrt{1 - \rho_{XY}^2}} e^{-\left[ \frac{\left( \frac{x - S_X}{S_X} \right)^2 - 2\rho_{XY}^2 \left( \frac{x - \bar{x}}{S_X} \right) \left( \frac{y - \bar{y}}{S_Y} \right) + \left( \frac{y - S_Y}{S_Y} \right)^2}{2(1 - \rho_{XY}^2)} \right]} \quad (\text{A.27})$$

onde  $-\infty < x < \infty$  e  $-\infty < y < \infty$ ,  $\bar{x}, \bar{y}$  são as médias de X e Y,  $S_X, S_Y$  são os desvios-padrões de X e Y e  $\rho_{XY}$  é o coeficiente de correlação entre X e Y.

### A.14 Distribuição Log-Normal

Seja X uma variável aleatória contínua, tem-se então a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\left[ \frac{(\log(x - \theta) - \zeta)^2}{2\varphi} \right]}}{(x - \theta)\varphi\sqrt{2\pi}} \quad \text{Validade: } x > 0, \varphi > 0 \quad (\text{A.28})$$

sendo  $\zeta$  um parâmetro de forma,  $\varphi$  um parâmetro de escala, e  $\theta$  um parâmetro de limite.

### A.15 Distribuição Gamma

Seja X uma variável aleatória contínua, tem-se a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{(x - \theta)^{\zeta - 1} e^{-\frac{(x - \theta)}{\varphi}}}{\Gamma(\zeta)\varphi^\zeta} \quad \text{Validade: } x > \theta, \zeta > 0, \varphi > 0 \quad (\text{A.29})$$

sendo a média  $\bar{x}$  e a variância  $S_x^2$  dados por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \zeta\varphi + \theta \\ S_x^2 &= \zeta\varphi^2\end{aligned}\tag{A.30}$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro de forma,  $\varphi$  é um parâmetro de escala,  $\theta$  é um parâmetro de limite e  $\Gamma$  representa a função gamma.

#### A.16 Distribuição Weibull

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua, tem-se a função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{\zeta(x-\theta)^{\zeta-1}}{\varphi^\zeta} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\varphi}\right)^\zeta} \quad x > 0, \varphi > 0, \zeta > 0\tag{A.31}$$

onde  $\zeta$  e  $\varphi$  são respectivamente parâmetros de forma e escala, enquanto que  $\theta$  é um parâmetro de limite.

#### A.17 Distribuição de probabilidade marginal contínua

Dada uma função de probabilidade conjunta  $f(x,y)$  das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a distribuição de probabilidade de  $X$  isolado  $g(x)$  é obtida pela integral dos valores de  $f(x,y)$  ao longo de  $Y$ . Do mesmo modo, a distribuição de probabilidade de  $Y$  isolado  $h(y)$  é dada pela integral dos valores de  $f(x,y)$  ao longo de  $X$ .

Definimos  $g(x)$  e  $h(y)$  como sendo as distribuições de probabilidades marginais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Para o caso de distribuição marginal contínua de  $X$  (sem considerar  $Y$ ), tem-se

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy\tag{A.32}$$

Para o caso de distribuição marginal contínua de  $Y$  (sem considerar  $X$ ), tem-se

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx\tag{A.33}$$

## A.18 Controle estatístico de processos

Diz-se que um processo está estatisticamente controlado quando suas únicas fontes de variação são causas comuns, sendo descritos por uma distribuição de probabilidade normal. Dessa forma, enquanto tal processo permanecer sob controle estatístico e não sofrer mudanças de localização, dispersão ou forma, ele continuará a produzir a mesma distribuição de peças dentro da especificação.

O controle estatístico de um processo é verificável por meio de testes de causas especiais para cartas de controle (que não serão abordadas neste trabalho) e de índices de capacidade.

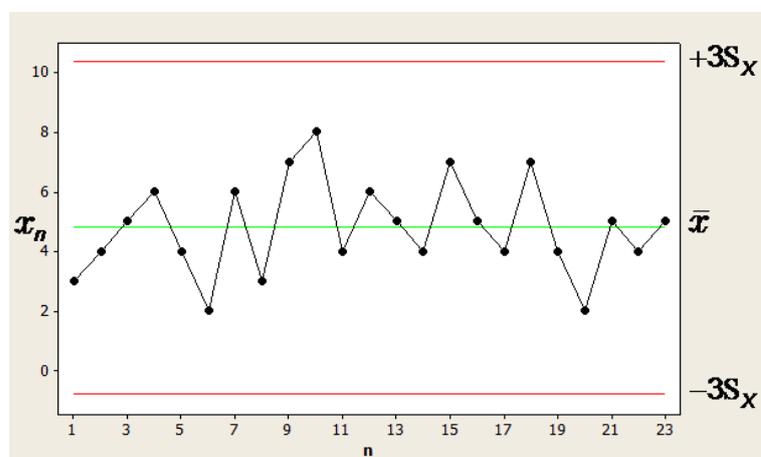


Figura A-2: Disposição de pontos observados em uma carta de controle

A Figura A-2 exemplifica a disposição de  $n$  pontos observados em uma carta de controle, para que seja possível a aplicação dos oito testes de causas especiais formulados por (NELSON, 1984) e que devem ser verificados para que um processo seja considerado como estatisticamente controlado:

1. Não deve haver pontos observados além dos limites  $\pm 3S_x$ ;
2. Não deve haver mais que 9 pontos observados em sequência acima ou abaixo da linha de centro  $\bar{x}$ ;
3. Não deve haver mais que 6 pontos observados em sequência crescente ou decrescente;
4. Não deve haver mais que 14 pontos observados em sequência alternada;
5. Não deve haver mais que  $\frac{2}{3}$  dos pontos observados abaixo do limite  $+2S_x$  ou acima do limite  $-2S_x$  (não mostrados na Figura A-2);

6. Não deve haver mais que  $\frac{4}{5}$  dos pontos observados abaixo do limite  $+1S_x$  ou acima do limite  $-1S_x$  (não mostrados na Figura A-2);
7. Não deve haver mais que 15 dos pontos observados em sequência abaixo do limite  $+1S_x$  ou acima do limite  $-1S_x$  (não mostrados na Figura A-2);
8. Não deve haver mais que 8 dos pontos observados em sequência dentro dos limites  $\pm 1S_x$  (não mostrados na Figura A-2).

Mais detalhes sobre cartas de controle e controle estatístico de processo podem ser verificadas em (FORD, 1995).